



# ॥ हिन्दी बीजगणित ॥

पहिला भाग

जिसको

पश्चिमोत्तरीय जिलों की पाठशालाओं के विद्यार्थियों के लिये पण्डित मोहनलाल ने अंग्रेजी से

हिन्दी भाषा में उल्था किया

अवध देश के डैरेक्टर आफ पब्लिक इन्स्ट्रक्शन

श्रीयत विलियम हैण्ड फोर्ड साहिब बहादुर

के द्वारा से

स्थान लखनऊ

मतबन्ध मुन्शी नवल किशोर में छापा गया

सन १८६५ ई०

॥ हिन्दी बीज गणित के प्रथम भाग का ॥  
सूची पत्र

— ०० —

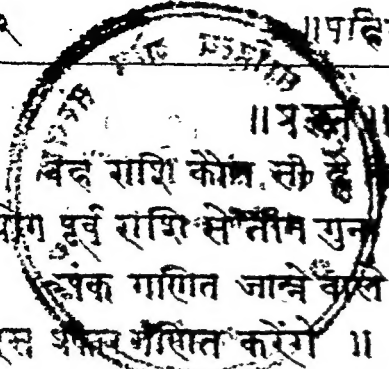
प्रकरणके नाम .....	पृष्ठ	पंक्ति
परिभाषा .....	३	१
संकलन .....	१४	१५
व्यवकलन .....	२४	३
गुणन .....	२५	१५
भाग .....	३६	१२
सममहत्तमापवर्तिक .....	४७	७
लघुसमापवर्त्य .....	५१	१४
भिन्न .....	५५	११
भिन्न संकलन और व्यवकलन .....	५८	११
भिन्न गुणन और भाग .....	६६	५
कोष्ठ और शृंखल .....	७५	८
एक घात एक वर्ण समीकरण .....	८८	२
एक घात एक वर्ण संबन्धी प्रश्न .....	१०२	७
परिभाषा संकलन व्यवकलन आदिसम्बन्धी प्रश्नोंके उत्तर .....	१३१	२

# हिन्दी बीज गणित ॥

## ॥ पहिला भाग ॥

जैसे अंक गणित में संख्याओं के स्थान में १, २, ३, ४, आदि अंक लिखते हैं वैसे ही बीज गणित में संख्याओं के स्थान में अक्षर लिखते हैं इस गणित को बीज गणित—इसलिये कहते हैं कि इस्ते गणित का मूल मालूम हो जाता है और बीज शब्द का अर्थ मूल है और जैसे पानी—की भाँष से केवल लोहे की बड़ी भारी नाव हजारों मन माल लाने के गंगा में पवन की नाई उड़ी चली जाती है और दूसरी हेशी नाव जिसको हाथ से खींचते हैं उसमें धूल की नाव की अपेक्षा माल भी बहुत कम लदता है और रेंगती सी जाती है ऐसे ही बीज गणित से बड़े २ कठिन प्रश्न सहज में हो जाते हैं और बहुतरे प्रश्न ऐसे हैं जो केवल बीज गणित ही से होते हैं अंक गणित से नाम को भी नहीं होते इस बात को सुगम उदाहरण से दिखाते हैं ॥





॥ प्रश्न ॥

बेह राशि कौन सी है कि जिसमें १० जोड़ दें तो योग पूर्व राशि से तीन गुना हो जाय ॥

अंक गणित जानने वाले दो हुए राशि की रीति से इस प्रश्न गणित करेंगे ॥

प्रथम कल्पना करो कि २० राशि है जो २० में १० जोड़ने से ३० हुआ और तीन गुने २० हैं इसीलिये ६० और ३० में ३० का अन्तर रहा दूसरे कल्पना करो कि १० पूर्व राशि है तो १० में १० जोड़ने से २० हुआ और तीन गुने १० हैं ३० इसलिये १० का अन्तर रहा फिर हुए राशि की रीति से तीस गुने १० वा ३०० में से दस गुने २० वा २०० घटाये तो शेष १० रहे और दस शेष में दोनों अन्तरों के अन्तर का वा २० का भाग देने से ५ पूर्व राशि मिली ॥

बीज के जानने वाले इस प्रश्न को इस रीति से करेंगे कल्पना करो कि (य) पूर्व राशि है तो प्रश्न के अनुसार

$$y + 10 = 3y$$

इसलिये  $2y = 10$  और  $y = 5$  पूर्व राशि हुई

बीज के पढ़ने वालों को चाहिये कि दोनों की रीति से जो उत्तर निकला है उनमें देखें कौन सी रीति छोटी और सुगम है दक्षिण प्रश्न ऐसे हैं कि उनको उत्तर केवल बीज गणित से ही निकलते हैं और अंक गणित से वे किसी रीति पर नहीं निकल सकते हैं इस बात की सत्यता दिखाने के लिये जो यहाँ कोई उदाहरण लिखते तो बहुकुछ भी लगाने में न आता। आगे बीज के पढ़ने से यह बात मालूम होगी

## ॥ परिभाषा ॥

राशि शब्द का अर्थ समूह वा ढेर है और इसके हर एक वस्तु का परिमाण जाना जाता है कि वह तौल आदि में कितनी है वा गिनती में कितनी है इसलिये राशि के समझने के लिये अंक लिखते हैं जैसे मनुष्यों की राशि का परिमाण गिनती से जाना जाता है और कपड़ों का परिमाण गजों की संख्या से जाना जाता है बीज गणित में व्यक्त अर्थात् जानी हुई राशि जैसे १० आदमी २० घोड़े आदि के स्थान में अ, क, ग, आदि अक्षर लिखते हैं और अव्यक्त अर्थात् अनजानी हुई राशि के स्थान में जैसे ३३ में बूझा जाय कितने गज कपड़ा है वा कितने मज नाल है इस के स्थान में य, र, ल, व, आदि अक्षर लिखते हैं अक्षरों के रखने में गणित सहज से थोड़े में हो जाती है क्योंकि २२४५६ के स्थान में (अ) लिख सकते हैं ॥

जोड़ना घटाना गुणा भाग आदि के चिन्ह लिखते हैं + यह चिन्ह जोड़ने का है इसे धन कहते हैं द्रव्य के इकट्ठे होने को धन कहते हैं इसलिये जब यह चिन्ह दो राशि के बीच में हो तो जानो कि बाईं ओर की राशि में घटानी और की राशि जोड़नी है जैसे अ + क अ धन क पढ़ेंगे इसका यह अर्थ है कि अ राशि में क राशि जोड़नी है

और कल्पना करो कि अ राशि ५ के बराबर है और क राशि ७ के बराबर है तो अ + क ५ + ७ का १२ के बराबर होगा और जो (म ४) के बराबर हो तो अ + क + ग को अ धन क धन ग पढ़ेंगे और वह १२ + ४ वा १६ के तुल्य

होगा ॥

घटाने का चिन्ह - इसे ऋण कहते हैं जब धन को अपने पास से दूसरे को उधार देते हैं उस धन को ऋण बोलते हैं ॥

इसलिये जब यह चिन्ह दो राशि के बीच में होतो जानो कि बाईं ओर की राशि में दाहनी ओर की राशि घटानी है जैसे अ-क इसे अ ऋण क पढ़ते हैं और इसका यह अर्थ है कि अ राशि में से क राशि घटानी है अ के स्थान में १० रक्खो और (क) के स्थान में दूतौ अ-क, १०-६ वा ४ के बराबर होगा और जो (ग) ०३ के तुल्य हो तो अ-क-ग इसे अ ऋण क ऋण ग पढ़ेंगे और वह ४-३ वा १ के तुल्य होगा ॥

गुणा करने का चिन्ह x इसे गुणित अर्थात् गुणा गया पढ़ते हैं इसलिये जब यह चिन्ह दो राशि के बीच में होतो जानो कि बाईं ओर की राशि दाहनी ओर की राशि से गुणी जायगी जैसे अ x क इसे अ गुणित क वा क से गुणा हुआ अ पढ़ेंगे और इसका यह अर्थ है कि (अ) राशि (क) राशि से गुणी गई है जो (अ) को ६ मानो और (क) को ४ तो अ x क ६ x ४ वा २४ के तुल्य होगा ॥

और जो (ग) ०२ के तुल्य हो तो अ x क x ग इसे अ गुणित क गुणित ग पढ़ेंगे और यह २४ x २ वा ४८ के तुल्य है इसी रीति से ३ x ४ का अर्थ ३ गुणित ४ है वा तीन ४ हैं ॥

x इस चिन्ह के स्थान में बहुधा - ऐसा एक चिन्ह कर देते हैं वा कुछ भी चिन्ह नहीं देते और दो राशि के बीच कोई चिन्ह न होने से यह समझ लेते हैं कि दाहनी राशि बाईं राशि

से गुणी गर्द है जैसे अ x क, अक और अक इन सब से यही जानो कि क राशि अ बार जोड़ी गर्द है वा अ राशि से क राशि गुणी गर्द ऐसे ही ७ य से ७ बार य जानो ॥

अ x क x ग, अ-क-ग अ क ग इन सब का एक ही अर्थ है और ३ यर से घ और र की ३ गुना घात जानो परन्तु जो दो राशि वा एक अंक और राशि के बीच कोई चिन्ह नहीं होता है तो हम उन से दो राशि का घात समझते हैं और पढ़ने में शब्द गुणित छोड़ देते हैं ॥

जैसेकोअ क और ३ य को पढ़ने में अ क और ३ य पढ़ते हैं इसलिये ३ x य और ३ x य वा तीन गुना य और ३ धन य को एक हीन समझो परन्तु अंक गणित में जोड़ने का चिन्ह बहुधा नहीं लिखते इसलिये जब दो अंकों के बीच कोई चिन्ह नहीं होता है तो हम उनका योग समझते हैं जैसे २ ३ का अर्थ  $2 \times \frac{1}{2}$  है और २३ का अर्थ  $20 + 3$  और दो अक्षर वा एक अंक और एक अक्षर के बीच गुणा करने में कोई चिन्ह नहीं रखते परन्तु जब दो अंकों को गुणा करना होता है तो उनके बीच x यह चिन्ह कर देते हैं और यह चिन्ह इसलिये नहीं देते हैं इसके देनेसे दशांश चिन्ह का मान हो सकता है ॥

३ x क के ४ x ३ तुल्य है

घ x ७ के ७ x ५ तुल्य है

६ x १० के १० x ६

अ x क के क x अ ०००००

अ क के क अ ००००

(६) जिन राशियों के गुणा करने से घात मिलता है उनमें से प्रत्येक को घात का गुणक रूप अवयव कहते हैं ॥

जैसे ३५ के ५ और ७ गुणक रूप अवयव हैं क्योंकि ५ × ७ के ३५ तुल्य है और ३५ के ३ और ५ गुणक रूप अवयव हैं और अ क के अ और क गुणक रूप अवयव हैं ॥

ऐसे ही ८ × ८ वा ७२ में ८ और ८ गुणक रूप अवयव हैं जो राशि दो वा अधिक राशियों के गुण करने से नहीं बन सकती हो तो उसके गुणक रूप अवयव नहीं होते हैं ॥

जैसे ७, १३, १७ में ७ के १ और ७ ही गुणक रूप अवयव हैं और १३ में १ और १३ और १७ में १ और १७ गुणक रूप अवयव हैं इनके सिवाय और कोई दो अंक गुणक रूप अवयव नहीं हैं अ क ग क अ राशि में क का गुण अर्थात् गुणक अ है वा अ का गुणक क है ॥

जैसे तारे में एक मनुष्य को दूसरे मनुष्य का सामीकहते हैं और दूसरे मनुष्य को भी पहले का सामीकहते हैं ३५ में ३ गुणक है क्योंकि यको ३ गुणा करने से घात ३५ के तुल्य होता है ॥

और ३५ में ५ का ३ गुण है र का ३५ गुण है और (३५) का (५) गुण है और २ (अ क ग) में (ग) का २ गुण है (क) का २ अ ग गुण है अ का २ क ग गुण है और अ क ग का २ गुण है (अ) राशि के १ और अ ही गुणक रूप अवयव हैं इसलिये अ का गुण १ है ॥

गुण से राशि को गुण करने से यह समझो कि गुणकी जितनी संख्या होगी उतनी बार राशि जोड़ी गई है जैसे ३५ का अर्थ है कि ३ बार ५ वा ३५ बार अर्थात् र का गुण ३५ है वा ३५ वा ५ इसमें ५ का गुण ३५ है और केवल (अ) से जानो कि अ राशि एक गुनी है इस कारण उसका १ गुण

है गुणने में ३ य वार वा २ अक वार कहना ठीक है क्योंकि हर एक अक्षर का अर्थ एक राशि वा संख्या है जैसे ३ य र ने जो य के स्थान में १० रखें तो ३ य ३० के तुल्य होगा और ३ य वार २ ३० र के तुल्य होगा ॥

भाग देने का चिन्ह  $\div$  इसको भाजित वा भाग दिया गया पढ़ते हैं और जिन दो राशियों के बीच वह चिन्ह होता है तो जानो कि बाईं ओर की राशि में दाहिने ओर की राशि का भाग लगा है जैसे अ  $\div$  क इसे अ भाजित क वा अ में क का भाग पढ़ेंगे ॥

और  $\div$  ४, २ के तुल्य है परन्तु बहुधा इस चिन्ह को नहीं लिखते क्योंकि  $\frac{अ}{क}$  भिन्न का यही अर्थ है जो अ  $\div$  क का है ऐसे ही  $\frac{क}{अ}$   $\div$  ४ के तुल्य है क्योंकि दोनों २ के तुल्य हैं ॥

जो (८) परिभाषा ऊपर लिखी है उन के अभ्यास के लिये उदाहरण लिखते हैं। जो अ १० के तुल्य हो, क, ३ के और य ७ के तो वतलाओ कि नीचे जो राशि लिखी है वे कौन से अंकों के तुल्य होंगी ॥

### ॥ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

- |                     |                           |
|---------------------|---------------------------|
| (१) अ + क + य       | (७) ७ अ + २ क - २ य       |
| (२) अ + क - य       | (८) ५ अ - ४ क - ४ य       |
| (३) अ - क + य       | (९) २ अक + ३ य            |
| (४) अ - क - य       | (१०) २ अ + ५ - ३ क य + १० |
| (५) २ अ - य         | (११) ७ अ क - अ क य        |
| (६) ४ अ + ३ क - २ य | (१२) ३ अ + क य - य य      |

(१३) ३ अ य में य का गुण क्या है ॥

(१४) ६ अ क य में य का गुण क्या है ॥

(१५) ६ अक्षरों में कय का गुण क्या है

(१६) २अ, २अक, अकअ, ३अकय, मअ, मयय, यअय, और (अकपर) प्रत्येक राशि के अक्षरों का गुण क्या है ॥

(१७) २५ का ऐसा गुण क्या है कि जो उससे २५ को गुणा दे तो घात १२५ हो जाय

(१८) ३अय और उय में क्या अंतर है और कल्पना करो कि ७ के तुल्य है

(१९) ३अय और ३अ-य में क्या अंतर है जब कि अ १० के और य ६ के तुल्य है ॥

(२०) ३अय और ३अय में क्या अंतर है जब कि अ ३ के तुल्य और य २ के तुल्य है ॥

जब कि अ १० के तुल्य है और क ३ के तुल्य और ७ के तो बताओ कि

(२१)  $\frac{३अय}{७}$  किसके तुल्य है ॥

(२२)  $\frac{३अय}{७}$  क किसके तुल्य है ॥

(२३)  $\frac{२अय}{क}$  किसके तुल्य है ॥

(२४)  $\frac{३क+३य}{अ}$  किसके तुल्य है ॥

(२५)  $\frac{अ-य}{क}$  किसके तुल्य है ॥

(२६)  $\frac{३अ-२य}{क} - \frac{अकय}{२अ}$  किसके तुल्य है ॥

(२७)  $\frac{५अय}{क} - \frac{५क+अ}{२य-३क}$  किसके तुल्य है ॥

(२८)  $\frac{३य}{४अ+३} + \frac{४कय}{१०अ-१६}$  किसके तुल्य है ॥

(२९)  $\frac{२अ+४क}{३य-अ-क} - \frac{अ-२क}{य-क}$  किसके तुल्य है ॥

(३०)  $\frac{मअ}{क+य} + \frac{नक}{अ-य} - \frac{पय}{अ-क}$  किसके तुल्य है ॥

जो एक राशि को उसी राशि से कई बार गुणा करो तो इसे घात क्रिया कहते हैं इसको नीचे उदाहरण लिखते हैं ॥

$अ \times अ$  को  $अ^2$  यों लिखते हैं और उसे (अ) का वर्ग वा  $अ$  वर्ग वा  $अ$  का दूसरा घात कहते हैं ॥

$अ \times अ \times अ$  को  $अ^3$  यों लिखते हैं ॥

और उसे  $अ$  का घन वा  $अ$  घन वा  $अ$  का तीसरा घात कहते हैं ॥

$अ \times अ \times अ \times अ \times अ$  को  $अ^5$  यों लिखते हैं ॥

और उसे  $अ$  के वर्ग का वर्ग वा  $अ$  वर्ग वर्ग वा  $अ$  का चौथा घात कहते हैं परन्तु याद रखो कि,  $अ$  और  $अ^2$  का अर्थ एक ही है

और  $अ$  और  $अ^3$  में अंतर है आगे पढ़ने से जानोगे कि  $अ^2$  के तुल्य है राशियों के ऊपर दाहनी ओर जो १ २ ३ ४ आदि अंक लिखे जाते हैं उन्हें घात मापक कहते हैं क्योंकि उन से राशियों के घात का प्रमाण जान पड़ता है ॥

$अ + अ$  को  $२अ$  यों लिखते हैं  $अ \times अ$  को  $अ^2$  लिखते हैं ॥

जो  $अ^2$  के तुल्य होतौ  $२अ^2$  के तुल्य होगा ॥

और  $अ^3$  के तुल्य और यह भी याद रखो कि  $२अ^3$  का अर्थ  $अ$  वर्ग दुना है और न कि  $२अ$  का वर्ग ॥

१० घात क्रिया से उलटी मूल क्रिया होती है इसे वह मूल राशि निकाल आती है जिसमें घात क्रिया हुई हो। जैसे एक राशि का वर्ग मूल उस राशि को कहते हैं जिसका वर्ग इष्ट राशि के तुल्य हो ऐसे ही किसी एक राशि का घन मूल उस राशि को कहते हैं जिसका घन इष्ट राशि के तुल्य हो ॥

८ का वर्ग मूल ३ है क्योंकि ३ का वर्ग वा  $३ \times ३ = ९$  के तुल्य है २७ का ३ घन मूल है उसका घन वा  $३ \times ३ \times ३ = २७$  के तु



त्य है ऐसे ही अ<sup>२</sup> का वर्गमूल (अ) है क्योंकि अ x अ, अ<sup>३</sup> के तुल्य है अ का घनमूल (अ) है क्योंकि अ x अ x अ, अ<sup>३</sup> के तुल्य है वर्गमूल का चिह्न  $\sqrt{\quad}$  वा केवल  $\sqrt{\quad}$  है घनमूल का चिह्न  $\sqrt[3]{\quad}$  है ॥

बहुधा वर्गमूल का चिह्न यह  $\sqrt{\quad}$  लिखा जाता है परन्तु  $\sqrt[3]{\quad}$  यह चिह्न ठीक है जैसे जब  $\sqrt{\quad}$  लिखा है तो अ का वर्गमूल जानो ॥

जिस रीति से अ + अ को २ अ लिखते हैं वही तरह  $\sqrt{\quad}$  अ +  $\sqrt{\quad}$  अ इसे अ का वर्गमूल दूना जानो ॥

इसे  $\sqrt{\quad}$  अ को लिखते हैं और २ गुणा अ का वर्गमूल पढ़ते हैं  $\sqrt{\quad}$  अक इस का अर्थ (अ) गुणा (क) का वर्गमूल है

$\sqrt{\quad}$  अ+क इसका अर्थ अ धन क वा अ और क के योग का वर्गमूल और जिस शिकामूल निकालना हो उस संपूर्ण शि के ऊपर मूल के चिह्न  $\sqrt{\quad}$  के ऊपर का भाग बढ़ाकर खींच दो जो अ के स्थान में १६ लिखें और क के स्थान में ८ तो  $\sqrt{\quad}$  अक,  $\sqrt{\quad}$  २५ वा ५ के तुल्य होगा और  $\sqrt{\quad}$  अक  $\sqrt{\quad}$  १४४ वा १२ के तुल्य होगा  $\sqrt{\quad}$  अ इसका अर्थ भिन्न  $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$  का वर्गमूल है ॥

परन्तु  $\sqrt{\quad}$  अ इसका अर्थ यह है कि अ के वर्गमूल में क का भाग लगा ॥<sup>क</sup>

### ॥ २ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

- (१) अ<sup>३</sup>+क<sup>३</sup>-ग<sup>३</sup>                      (५) १२अ<sup>३</sup>क+२०अक-२कग<sup>३</sup>  
 (२) १३अ<sup>३</sup>+३क<sup>३</sup>-४ग<sup>३</sup>                      क<sup>३</sup>अ<sup>३</sup>ग<sup>३</sup>  
 (३) ५अकग-२२क<sup>३</sup>+३ग<sup>३</sup>                      (६) अ+क २अ  
 (४) अ<sup>३</sup>क+क<sup>३</sup>ग

(७)  $\frac{८\sqrt{क} + ८\sqrt{अक}}{३ग - ३कग}$  (८)  $\frac{म\sqrt{अ} + न\sqrt{क}}{५ग}$

(९)  $२\sqrt{क} - २\sqrt{ग}$  (१०)  $\sqrt{अक} - \sqrt{अक}$

(११)  $\sqrt{अ} + \sqrt{अ} - \sqrt{अक} + २\sqrt{३कग}$

(१२)  $\sqrt{३ग+क} - \sqrt{२क-२अ}$  (१३)  $\frac{म\sqrt{क} + न\sqrt{कग}}{३} - \frac{प\sqrt{अग}}{३}$

(१४)  $३\sqrt{अग} + \sqrt{४क} - २\sqrt{३ग}$

(१५)  $\sqrt{क+ग} - \sqrt{अ} - ३\sqrt{३कग}$

(१६)  $३\sqrt{अ} + \sqrt{३ग} + \frac{३\sqrt{कग}}{६} - ४\sqrt{३क-अ}$

(१७) जो अ २ के तुल्य हो तो २अ और अ में क्या अन्तर होगा ॥

(१८) जो य १०० के तुल्य हो तो  $२\sqrt{य}$  और  $२ \times \sqrt{य}$  में क्या अन्तर होगा ॥

(१९) जो य ६४ के तुल्य हो तो  $३\sqrt{य}$  और  $३\sqrt{य}$  में क्या अन्तर होगा ॥

(२०) जो अ १ के तुल्य हो और क ८ के तुल्य तो  $\sqrt{अ+क}$  और  $\sqrt{अ+क}$  में क्या अन्तर क्या होगा ॥

(२१) जो अ १६ के तुल्य हो और क ४ के तुल्य तो  $\sqrt{अक}$  और  $\sqrt{अक}$  में क्या अन्तर होगा ॥

११ = इस अंक की तुल्य है पढ़ते हैं ॥

जैसे  $२ + ४ = ६$  अ+य = क इसे अघन य तुल्य है क के यों पढ़ते हैं और इसका अर्थ यह है कि अ और य का योग क के तुल्य है

$८ \div ४ = २$  और  $\sqrt{३६} = ६$

< इस चिन्ह को छोटा है पढ़ते हैं ॥

जैसे अ < क इस का अर्थ यह है कि अ,  
क से छोटा है ॥

∴ इस चिन्ह का इसलिये पढ़ते हैं ॥

∴ इस चिन्ह को क्योंकि पढ़ते हैं ॥

१२ जब कि एक राशि के कई खंड हों और उनके दा-  
हिनी और धन च्छाण चिन्ह लगे हों तो हर एक खण्ड को  
पद कहते हैं और राशि के जितने खंड हों उतने ही पद की  
राशि कहावेगी । जैसे अ राशि एक पद की है ऐसे ही अ,  
अक, अक, अ क ग, ये एक पद की राशि हैं और अका  
दो पद की राशि है ॥

(१३) किसी एक पद की राशि के बाईं ओर धन चिन्ह हो उ  
से धन राशि कहते हैं ॥

और जो किसी एक पद की राशि के बाईं ओर च्छाण  
चिन्ह हो उसे च्छाण राशि कहते हैं ॥

क्योंकि ०+ (अ) वा + (अ) वा अ एक ही अर्थ इसलिये  
जो एक पद की राशि के बाईं ओर + वा - का चिन्ह न हो तो  
उसे धन राशि कहते हैं ॥

जो एक राशि कई पदों की हो और उसके धन पदों  
का योग च्छाण पदों के योग से अधिक हो वा कम हो तो संपू-  
र्ण राशि भी धन होगी वा च्छाण ॥

जैसे कोई भौषणी देखा चाहता है कि मेरे पास कितना  
धन है तो पहिले वह अपने पास जो कुछ रुपया होगा उ  
से गिनेगा और कल्पना करे कि उसके पास का धन अ है  
फिर जो कुछ उसने रुपया और आदमियों को उधार

दिया हो उसे गिनेगा और माने कि उसे उधार में क रूपये लेने हैं तो उसके पास संपूर्ण धन ३५+ क होगा परन्तु उसे कुछ रूपया देना भी है और वे संपूर्ण धन से कम हैं और उसका मान - ग जानो तो ब्यौपारी के पास शेष धन ले लेके ३५+क-ग बचेगा और जो संपूर्ण धन से अधिक रूपये देने होंगे तो उस के पास कुछ न बचेगा परन्तु जितना कि ऋण धन से अधिक होगा उतना शेष ऋण उसे और चुकाना होगा और याद रखो कि जबकेवल राशि के चिन्ह का वर्णन हो तो + या - चिन्ह जानो और समझो कि राशि धन है वा ऋण ॥

॥ अक्ष ॥

- (१) बीज गणित किसे कहते हैं और उसका प्रयोजन क्या है ॥
- (२) राशिका क्या अर्थ है ॥
- (३) बीज गणित में राशियों के स्थान में अक्षर क्यों लिखते हैं
- (४) ३५+क, ३५ धन के हस्तका क्या अर्थ है क्या २+५ इसका अर्थ है कि दो में पात्र जोड़े जायगे ॥
- (५) अंक गणित में ३३ का क्या अर्थ है और बीज गणित में अंक इसका क्या अर्थ है ॥
- (६) कौसी राशि के स्थान में ३अ लिखा है ३अ और ३अ-क इन में कौनसी राशि बड़ी है
- (७) जो अ, १ के तुल्य हो क २ के तुल्य और ग ३ के तुल्य तो बताओ कि अ क ग, १२३ के तुल्य होगा वा नहीं और जो उसके तुल्य न हो तो किस अंक के तुल्य होगा ॥
- (८) अंक गणित में ५  $\frac{३}{२}$  इसका क्या अर्थ है और जो

बीज गणित मे ३३ <sup>क</sup>/<sub>ज</sub> इसका क्या अर्थ है ॥

(८) धन राशि की परिभाषा के अनुसार + य इसका क्या अर्थ है ॥

(९) एक राशि के गुणक रूप अवयव ६ और ७ हैं तो वे दोनो राशि एक हैं वा नही एक हैं तो क्या है और बताओ कि वह कौन सी राशि है जिसके वे गुणक रूप अवयव हैं क्या अक ग इसका अक गुणक रूप अवयव है अक ग जो अक्षर लिखे हैं उन में प्रत्येक दो अक्षर के बीच में कौन सा चिन्ह लुप्त है और दो अक्षरों के पास होने से उनका क्या अर्थ होता है ॥

(११) लिखो कि अक-ग शब्द से अक स्तण ग इसका क्या अर्थ हुआ ॥

(१२) लिखो कि २अक+३ शब्द से हो अक धन ३ इसका क्या अर्थ है ॥

### ॥संकलन वा जोड़ना॥

जिन राशियों के केवल अक गुणक भिन्न हैं तो उन राशियों को सजातीय राशि कहते हैं ॥

जैसे ४अ, ७अ, १०अ, समान जाति की राशि ऐसेही ३अक, ६अक, समान जाति की राशि हैं अ३अ५अ ये भी समान जाति की राशि हैं ॥

जिन राशियों के भिन्न अक्षर होते हैं उन्हें विजातीय राशि कहते हैं ॥

जैसे अ, क, ये विजातीय राशि हैं और २अ, ३क, ४घ,

यह भी विजातीय राशि हैं ऐसे ही अ,क, अ,क, अ,क विजातीय राशि हैं ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) ५ अ-३ क, ४ अ+७ क- ८ अ-५ क इनमें से सजातीय राशि एक और इकट्ठी करो और उनके चिन्ह भीज्योंके त्यों रख दो ॥

+ ५ अ		- ३ क		उत्तर लंब रूप रेखा के एक एक और की
+ ४ अ		+ ७ क		राशि सजातीय हैं और दोनों और की
- ८ अ		- ५ क		राशि मिल कर विजातीय हैं ॥

(२)  $3^2$ अ+ $3^2$ अक+ $3^2$ अक+ $2^3$ अ+ $2^3$ क+ $4^3$ अक- $2^3$ अग- $2^3$ क इसमें से सजातीय राशियों को अपने २ चिन्ह सहित एक स्थान में इकट्ठी करो ॥

+ $3^2$ अ		+ $3^2$ अक		+ $3^2$ अक		- $2^3$ अग		+ $2^3$ क
+ $3^2$ अ		- $3^2$ क		+ $4^3$ अक				- $2^3$ क

(३)  $2^2$ अ- $3^2$ क+ $7^2$ कग+ $4^2$ अकग+ $2^2$ अर- $3^2$ क+ $4^2$ क+ $7^2$ कग- $2^2$ अ- $2^2$ क+ $6^2$ क+ $10^2$ अ- $4^2$ अ- $4^2$ र+ $4^2$ अकग- $2^2$ कग+ $7^2$ क- $3^2$ ग इसमें से समान जाति की राशियों को अपने २ चिन्ह सहित इकट्ठी करो ॥

+ $2^2$ अ	- $3^2$ क	+ $7^2$ कग	+ $4^2$ कग	- $4^2$ अकग
- $2^2$ अ	+ $6^2$ क	- $2^2$ कग	+ $7^2$ कग	+ $4^2$ अकग
+ $10^2$ अ	- $4^2$ अ			
+ $2^2$ अर	- $3^2$ क	+ $4^2$ क	+ $7^2$ क	
- $4^2$ र	- $4^2$ अ	+ $2^2$ क	- $1^2$ ग	
	+ $4^2$ अ			

## ॥ १५ सजातीय राशियों के जोड़ने की रीति ॥

प्रथम जब जिन राशियों का योग करना हो उनके बाईं ओर एक से चिन्ह हों चाहे वे सब धन हों वा ऋण हों तो उन के योग करने की यह रीति है कि सब गुणक अंकों का योग करो उसे नया गुणक मानो और उस के बाईं ओर सजातीय राशि का चिन्ह लिखकर उस गुणक के दाहिनी ओर राशि के अक्षर लिख दो ॥

जैसे ५ अ में ४ अ जोड़ने से ९ अ होते हैं क्योंकि ५ अ का अर्थ ५ गुना अ वा अ + अ + अ + अ + अ + अ हैं और ऐसे ही ४ अ का अर्थ ४ गुना (अ) वा अ + अ + अ + अ है इसलिये ५ अ में ४ जोड़ने से ९ गुना (अ) होता है वा ९ (अ) हुआ

— २ क इसका यह अर्थ है कि २ क घटाना है और ऐसे ही — ३ (क) इसका अर्थ यह है कि ३ क घटाना है इसलिये — २ क में — ३ क जोड़ने से योग — ५ क के तुल्य है और उसका अर्थ है कि ५ क घटाना है ॥

दूसरे जिन राशियों का योग करना हो उनके चिन्ह-भिन्न हों वा कई राशि के चिन्ह धन हों और कई राशियों के चिन्ह ऋण हों तो धन गुणक अंकों का योग करो और ऋण गुणक अंकों का भी योग करो और बड़े योग में से छोटा योग घटा कर शेष के दाहिनी ओर सजातीय राशि के अक्षर लिख दो इस संपूर्ण राशि के बाईं ओर बड़े योग का चिन्ह करो जैसे ५ अ वा + ५ अ में — २ अ जोड़ना हो तो योग + ३ अ के तुल्य होगा क्योंकि + ५ (अ) का अर्थ यह है ५ अ जोड़ना है और — २ अ का अर्थ यह है कि २ अ घटाना है दोनों को मिलाने से योग ३ (अ) के तुल्य हुआ ॥

३ अ-२ अ-५ अ और + १० अ को जोड़ना हो तो उनमें १३ अ धन हैं और ७ (अ) अक्षरों द्वारा लिये योग + ६ (अ) के तुल्य है ॥

- ३ अ, २ अ, ५ अ और - १० अ को जोड़ो उनमें ७ अ धन हैं और १३ अ अक्षरों द्वारा लिये योग - ६ अ के तुल्य है

॥ जोड़ने के उदाहरण नीचे लिखते हैं ॥

२ अ	२ अक	- ५ अ	- ३ अक
४ अ	५ अक	- ६ अ	- ५ अक
७ अ	२ अक	- २ अ	- ३ अक
५ अ	अक	- ३ अ	- २ अक

योग १४ अ	१० अक	- १४ अ	- ११ अक
४ अ	२ अक	३ अ	१५ अक
- ७ अ	७ अक	२ अ	- ७ अक
५ अ	- ६ अक	- ६ अ	- ५ अक
- ३ अ	- ५ अक	७ अ	५ अक
अ	+ ५ अक	- ४ अ	- ३ अक
१० अ	अक	- ५ अ	- ३ अक
- ६ अ	- ८ अक	१० अ	- १० अक

योग = ६ अ      ०      ७ अ      - ३ अक  
 तीसरे जब दो वा अधिक पदों की राशियों का योग करना हो तो सजातीय राशियों का योग अलग-अलग निकाल लो और इनको अपने-अपने चिह्न सहित एक साथ



में रख दो वही अंतर होगा जैसे २ अ + ३ को ३ अ + ४ क में जोड़ना है तो २ अ को ३ अ में जोड़ा तो योग ५ अ हुआ और + ३ क को + ४ क में जोड़ा तो योग + ७ क हुआ इसलिये संपूर्ण योग ५ अ + ७ क के तुल्य हुआ ॥

ऐसे ही जो ३ अ - ४ क को २ अ + ३ क में जोड़ना हो तो २ अ और ३ अ मिलके ५ अ हुए और - ४ क और + ३ क मिलके - १ क के तुल्य है इसलिये योग ५ अ - १ क हुआ ॥

२ अ + ३ क का केवल यही अर्थ है कि २ अ में ३ क जोड़ना है ऐसे ही ३ अ + ४ क का भी यही अर्थ है कि ३ अ में ४ क जोड़ना है इसलिये जब हम कहें कि २ अ + ३ क और ३ अ + ४ क इनको जोड़ लाओ तो इसका यह अर्थ साधारण समझा कि २ अ, ३ क, ३ अ, और ४ क को जोड़ना है ॥

अंक गणित में भी जब उच्च जाति और हीन जाति की राशि जोड़नी होती है तो उच्च जाति की राशियों को अलग जोड़ लेते हैं और हीन जाति की राशियों को अलग जैसे पाद्यों में पाद जोड़ते हैं और आने में आने और रुपयों में रुपये ॥

॥उदाहरण॥

(१) ५ अ - ३ क और ४ अ - ७ क इनका योग बताओ  
 ५ अ - ३ क                      ५ अ में ४ अ जोड़ा तो ९ अ  
 ४ अ - ७ क                      भया और ३ क घटाने हैं और ७ क  
 योग = ८ अ - १० क            भी घटाने हैं इसलिये सब १० क

घटाने हैं वा-१० क॥

(२) ५अ-३क और ४अ+७क इनका योग निकालो

५अ-३क ५अ में (अ) जोड़ने से योग ८अ हुआ

४अ+७क अ और ७क धन में से ३क घटा नि

योग=८अ+४क कालातो शेष +४क रहा ॥

(३) ५अ-३क, ४अ+७क और -८अ-५क इन का योग करो ॥

५अ-३क यहाँ ८अ धन है और ८ (अ)

४अ+७क घटा इसलिये १अ बाक्य धन रहा

-८अ-५क और ७क धन है और ८क घटा

योग = अ-क इसलिये १क वाक्य घटा रहा ॥

(४) ३अ+४कग-२+१०, -५अ+६कग+२घ

-१५ और -४अ-८कग-१०घ+२१ इनका योग

करो

॥सजातीय राशियों को एक दूसरे के नीचे रखवो

३अ+४कग-घ+१० सजातीय राशियों की पहिली

-५अ+६कग+२घ-१५ वल्ली में ३अ धन है ८अ

-४अ-८कग-१०घ+२१ घटा इसलिये ६अ घटा

योग = -६अ+कग-८घ+१६ वा वा-६अ रहा और

दूसरी वल्ली में १०कग धन है और ८कग घटा है इस

में १कग बाक्य धन वा+कग रहा तीसरी वल्ली में

२घ धन है और ११घ घटा है इस में ८घ घटा-८घ

रहा और चौथी वल्ली में ३१धन है और १५ घटा इस में

१६धन वा+१६ रहा ॥

॥द्विसजातीय राशियों के योग करने की रीति ॥

भिन्न जाति की राशियों के योग करने में यही अर्थ समझो कि राशियों को अपने २ चिन्ह सहित एक सीध में लिख दो जैसे अ-क, ग-घ, और च इनका अ-क + ग-घ + च योग हुआ ॥

- इस का अर्थ यही है कि सब राशि इकट्ठी हैं और यह याद रखो कि अ + क इस का अर्थ है कि अ में क जोड़ना है और यह न समझो कि अ में क जुड़ा हुआ है क्योंकि जब तक अ और क इनके मान वा संख्या न मात्स्य होंगी तब तक अ और क इनका योग नहीं हो सकता ॥

जैसा जोड़ कहै कि १० मन और ३ सेर पाँच छटाँक का योग क्या है तो उन्हें एक पंक्ति में इस रीति से लिखेंगे मन १०, सेर ३ छटाँक ५ और जो जोड़ पूछे कि एक कमरे में १० लड़के हैं और दूसरे में ५ हैं तो उनका योग क्या होगा १५ लड़के क्योंकि वे एक ही जाति के हैं इसलिये उन्हें जोड़ देंगे परंतु एक हाते में ३ बैल और दूसरे में पाँच घोड़े हैं तो उनका योग क्या होगा तो उन्हें अलग २ करके ही बतावेंगे कि ३ बैल हैं और ५ घोड़े हैं यही उनका जोड़ है कुछ उनको जोड़ कर ८ घोड़े वा ८ बैल न बतावेंगे क्योंकि वे विजातीय हैं इसलिये उनका योग नहीं हो सकता और जिन विजातीय राशियों का योग करना होता है उन्हें अपने-अपने चिन्हों सहित एक पंक्ति में लिख देते हैं और उसे ही उन राशियों का योग समझते हैं ॥

(१७) जिन राशियों का योग करना हो उन में समान जाति और भिन्न जाति की राशि हो तो १५ प्रकाम के अनुसार सजातीय राशि का योग करके उसके दाहिनी ओर विजातीय

राशियों को अपनेचिन्ह सहित रख दो ॥

(१८) और इसकी कुछ चिन्ता नही कि योग में अपसरवाहो जिस काम से रक्वो परंतु उनके चिन्ह में कुछ अंतर न पड़े और बद्धा योग के अपसरों को वर्णों के काम से लिखते हैं ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) अ + २ क - ग, अ - ५ घ + २ ग और य + २ + ३ घ इनका योग करो ॥

अ + २ क - ग

अ - ५ घ + २ ग

+ ३ घ + ५ + २

अ और अ सजातीय राशि हैं

- ५ घ और + ३ घ तथा

- ग और + २ ग तथा

और शेष राशि विजातीय हैं

योग = २ अ + २ क + ग - २ घ + ५ + २

(२) ३ अ - क ग, २ क - अ ग, ४ ग - अ क और अ + क - ग इनका योग करो ॥

३ अ - क ग

२ क - अ ग

४ ग - अ क

अ + क - ग

३ अ और अ

सजातीय हैं

२ क और क तथा

४ ग और ग तथा

और शेष राशि

विजातीय हैं ॥

योग = ४ अ + ३ क + ३ ग - अ क - अ ग - क ग

(३) य - ९ घ + २ और र + ३ इनका योग करो ॥



- (८) ३ पर-२ य और पर+ह्य।  
 (९) ४ प-२ व+१ और ७-३ प इनको जोड़ो।  
 (१०) ५ अक-२कम और अक+कथ  
 (११) ८ मन+म और १-न-७मन  
 (१२) २ अ य+३ कर और अ य-कर  
 (१३) ३ अ+३क+४ ग और २ अ-३क+ग  
 (१४) ४ पर+य-७ और ७ पर-२ य+३  
 (१५) ५+व-५ व और २ प व-३ प+२ व  
 (१६) ५+२ प व+व और ५-२ प व+व  
 (१७) ७ अ क-५ अ ग+१ और अक+६ अ ग-२  
 (१८) ७ य-६ र-५-३ र-५+१-२ य+३ र ६ और ५+६ र  
 (१९) ७ अ-६-६-अ, ७ अ-१-अ-१ और ६+अ  
 (२०) अ-३क+३ ग-५ और अ+३क+३ ग+५  
 (२१) ६ य-८ र-७ और ३ ल-६ य+६ य+७  
 (२२) अ+२ अक+क और २ अ-अक-३क  
 (२३) ३ य-६ य+५, २ य-३ य और ४-य-२ य  
 (२४) अ ग+क व, क व-ग व और अ ग+ग व  
 (२५) अ य-कर+पर और अ य-य-कर-र  
 (२६) अ-२ अ य+अ य, य+३ अ य और २ अ-अ य-अ य  
 (२७) अ-३ अक<sup>३</sup>क, २क<sup>३</sup>क<sup>३</sup>क<sup>३</sup>क<sup>३</sup>क<sup>३</sup>क<sup>३</sup> और २  
 अक<sup>३</sup>क<sup>३</sup> इनका योग करो ॥  
 (२८) ४ य+२ य र, ३ य-य र+र और म य+न र इन  
 का योग करो ॥  
 (२९) ४ य र ४ अ य र-२ अ य+२ य और य<sup>३</sup>+अ य र  
 +अ य-य ॥

(३०) अघ + कघ - २गघ,  $\frac{१}{२}$  अघ  $\frac{३}{२}$  कघ और  $\frac{३}{२}$  अक  
+ २ गघ - अग ॥

### ॥ व्यवकालन वा घटाना ॥

(२९) एक राशि में से दूसरी राशि का घटाने की रीति ॥

प्रथम जो राशि सजातीय हों और उन के चिन्ह भी एक से हों अर्थात् सब धन हों वा ऋण तो उन राशियों के अंतर निकालने की यह रीति है कि उन के गुण का अंतर निकाल के उसके बाईं ओर सजातीय राशियों का चिन्ह कर दो और उन के अक्षर उसके दाहिनी ओर लिख दो जैसे ५ अ में से २ अ घटाओ क्योंकि ५ अ = ३ अ + २ अ इसलिये ५ अ में से २ अ वा + २ अ निकाला तो शेष ३ अ रहा ॥

- ५ अ में से - २ अ घटाओ क्योंकि - ५ अ = उ अ - २ अ इसलिये - ५ अ में से - २ अ मिला तो शेष - ३ अ रहा

दूसरे जो राशि सजातीय हों परन्तु चिन्ह भिन्न हों अर्थात् एक राशि धन हो और दूसरी ऋण तो उनको अंतर निकालने की यह रीति है कि राशियों के गुण का योग करके उसके बाईं ओर उस राशि का चिन्ह कर दो जिसमें दूसरी राशि घटानी हो और उसके दाहिनी ओर सजातीय राशि के अक्षर लिख दो । जैसे - ५ अ में से + २ अ घटाओ इसको - ५ अ - २ अ यों लिखेंगे और इसका

अर्थात् अर्थ है कि अ राशि ५ बार और २ बार वा ७ बार घटानी है इसे - ७ अ यों लिखते हैं ॥

५ अ में से - २ अ घटाओ क्योंकि ५ अ = ७ अ - २ अ इसलिये ५ अ में से - २ अ निकाला तो शेष ७ अ रहा ॥

तीसरे जो राशि विजातीय हों तौ उनका अंतर निकालना यही है कि उन राशियों को चिन्ह सहित एक सीध में लिख दो जैसे अ में से क घटाओ तौ अ-क यों लिखते हैं  
 अ में से क घटाओ क्योंकि अ = अ + क - क इसलिये  
 अ में से - क निकाला तौ शेष अ + क रहा ॥

॥ ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन्हें इकट्ठा करवो ॥  
 लिखा

५ अ में से २ अ वा + २ अ	घटाया तौ शेष + ३ अ रहा
- ५ अ में से - २ अ	घटाया तौ शेष - ३ अ रहा
- ५ अ में से २ अ वा + २ अ	घटाया तौ शेष - ७ अ रहा
+ ५ अ में से - २ अ	घटाया तौ शेष + ७ अ रहा
अ वा + अ में से क वा + क	घटाया तौ शेष अ - क रहा
अ वा + अ में से - क	घटाया तौ शेष अ + क रहा

ऐसे ही और उदाहरण करने से यह जान पड़ता है कि नीचे जो राशि लिखी हैं वह घटाने के सब प्रश्न के लिये अदृश्य होगी

### ॥ रीति ॥

जिस राशि को घटाना हो उसका चिन्ह बदल दो अर्थात् तौ उनका चिन्ह + धन हो तौ उसके स्थान में - चिह्न चिन्ह करदो ॥

और जो उसका चिन्ह - हो तौ उसके स्थान में + धन रक्वो और फिर योग करने की रीति से उत्तर निकालो

### ॥ उदाहरण ॥

(१) अ से	(२) ७ अ से	(३) अ से
अ घटाओ	६ अ निकालो	अ घटाओ
अंतर = २ अ	अ	०



(४) ३ अ से (५) ७ अ से (६) अ से  
 - अ घटाओ - ६ अ घटाओ - अ घटाओ

अंतर = ४ अ १३ अ ३ अ

(७) - ३ अ से (८) - ७ अ से (९) - अ से  
 अ घटाओ + ६ अ अ घटाओ

अंतर = -४ अ -१३ अ -२ अ

(१०) - ३ अ से (११) - ७ अ से (१२) - अ से  
 - अ घटाओ - ६ अ - अ घटाओ

अंतर = २ अ - अ ०

(१३) - अ + क से (१४) अ - क से (१५) र + अ से  
 अ - क घटाओ अ + क र - अ घटाओ

अंतर = २ अ + २ क - २ क २ अ य

(१६) ३ अ - ४ क + ६ ग से (१७) ७ अ - २ क + ४ ग - २  
 अ - २ क + ६ ग ६ अ - ६ क + ४ ग - २

अंतर = २ अ - २ क - २ ग अंतर = अ + ४ क - १

(१८) २ अ - ६ अ क - अ ग + ५ से  
 ५ अ - ८ अ क - २ अ ग - १

अंतर = -१ अ + २ अ क + अ ग + ६

(१९) ३ य र - य - र + अ  
 २ य र + य - र - व

अंतर = य र - २ य - २ र + अ व

(२०) अ + २ अ क - ३ ग (२१) ५ य - ४ य र + र  
 २ अ - ५ अ क - ७ ग - य + ५ य र + ३ र

अंतर = - अ + ७ अ क + ४ ग अंतर = ६ य - ५ य र - २ र

$$(22) \frac{2\text{अ} + \text{य} - 4\text{क} - 4\text{ग}}{\text{य} + 2\text{क} - 4\text{ग}} \quad (23) \frac{\text{य} - 2\text{य} + 4\text{य} - 10}{\text{य} - 4\text{य} + 10}$$

$$\text{अंतर} = 2\text{अ} - 4\text{क} \quad \text{अंतर} = \text{य} - 2\text{य} - 10$$

$$(24) \frac{2\text{अ} + \frac{1}{2}\text{क} + 1}{\frac{1}{2}\text{अ} + \text{क} + \frac{1}{2}} \quad (25) \frac{2\text{य} - \frac{1}{2}\text{य} + \frac{1}{2}\text{य}}{\frac{1}{2}\text{य} - \frac{1}{2}\text{य} - \frac{1}{2}\text{य}}$$

$$\text{अंतर} = \frac{1}{2}\text{अ} - \frac{1}{2}\text{क} + \frac{1}{2} \quad \text{अंतर} = \text{य} - \text{य} + 2\text{य}$$

(२०) क्योंकि अ + क में अ - क जोड़ने से योग अकेलु-  
 त्यहै और अ + क में से २अ + क घटाने से अंतर शक) को  
 तुल्य है इससे यह बात निकलती है कि किसी दो राशि के  
 के अंतर में उनका योग जोड़ा जाय तो वह योग दो गुनी बड़ी  
 राशि के तुल्य होगा और जो अंतर को योग में से घटावे तो  
 शेष दो गुनी छोटी राशि के तुल्य होगा ॥

इस रीति से नीचे जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर निकल  
 आते हैं यही रीति लीलावती में भी लिखी है उसे संकम  
 ए कहते हैं परन्तु लीलावती पढ़ने वाले लोग उस ग-  
 णित का मूल ऐसा नहीं समझते जैसा बीज गणित पढ़ने  
 वाले जानते हैं इसका और अभी ऊपर स्पष्ट लिख चुके  
 हैं और इस के उदाहरण आगे लिखते हैं ॥

॥ प्रश्न ॥

दो संख्याओं का योग १०० है और उनका अंतर  
 ५० है तो बताओ कि वे संख्या कौन सी हैं ॥

दुगुनी बड़ी राशि = १०० + ५० = १५०

इस लिये बड़ी राशि = ७५

और दोनों राशियों का अंतर = ५० है ॥

इसलिये छोटी राशि =  $94 - 40 = 24$

इस कारण 94 और 24 दोनों राशि हैं

(२) एक पुरुष और स्त्री की अवस्था मिलकर 99 वर्ष की है उनमें पुरुष की अवस्था स्त्री की अवस्था से 9 वर्ष अधिक है तो बताओ कि हर एक की अवस्था क्या है ॥

बड़े पुरुष की दुगुनी अवस्था =  $99 + 9 = 108$

इसलिये बड़े पुरुष की अवस्था = 42 वर्ष

और इस कारण दूसरे की उमर =  $42 - 9 = 33$  वर्ष

(३)  $\frac{1}{2}$  के ऐसे दो खंड करो कि एक खंड दूसरे खंड से  $\frac{1}{3}$  के तुल्य बड़ा हो ॥

दोनों खंडों का योग =  $\frac{1}{2}$

दोनों खंडों का अंतर =  $\frac{1}{6}$

दो गुना बड़ा खंड =  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

इसलिये बड़ा खंड =  $\frac{2}{3}$  का  $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

ऐसे ही दो गुना छोटा खंड =  $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

इसलिये छोटा खंड =  $\frac{1}{6}$  का  $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

इस कारण दोनों खंड  $\frac{1}{3}$  और  $\frac{1}{6}$  हैं ॥

॥ अभ्यास के लिये

उदाहरण ॥

(१) अ से क - य घटाओ ॥

- (२) अ+क-ग-घसें अ-क+ग-घ घटाओ ॥  
 (३) इअ-क-ग से अ-क+२ग घटाओ ॥  
 (४) ऋअ+य-५क-५गसे य+२क-५ग घटाओ ॥  
 (५) इय+२र-५ल से इयु+२र+४ल बटाओ ॥  
 (६) २अय+कर-ग से अय-कर+ग घटाओ ॥  
 (७) ३कग-अक+असे रकग+अक-अ बटाओ ॥  
 (८) यर+य+र से यर-य+र ॥  
 (९) २यर+३य+४र से यर-२य-र ॥  
 (१०) २मन+५म-३न से मन+म+न ॥  
 (११) -२यर+मय-पर से -३यर-२मय-पर ॥  
 (१२) ५अकग-२अक-३अग से २अकग+अक-अग  
 +२  
 (१३) अ-क-ग से अ-२क-२ग  
 (१४) ४अय-३अ+२य से २अय-अ+४य ॥  
 (१५) ३अक+२अग-५ग से अक-अग-३ग  
 (१६) २यर+३अ-अक+५से २अ-अक+५  
 (१७) ३अय-२यर+३से ३अय+३यर-३  
 (१८) अ+क-ग से ३अ-३क-३ग

॥उदाहरण॥

(२१) एक पद की राशि को दूसरे पद की राशि से गुणा करने की राति ॥

प्रथम की दोनो राशि धन हों जैसे २ अ और ३ क तो उनका घात ४ प्रथम के अनुसार २ अ ५क के तुल्य है ॥

२ अ × ३ क = २ × अ × ३ × क और अ × ३ = ३ × अ (प्रक्रम ५)

इसलिये घात = २ × ३ × अ × क = ६ अ क क्योंकि २ × ३ = ६ ॥

दूसरे जो एक राशि चरण हो जैसे २ अ को - ३ क बार गुणा करो य - २ क को ३ क बार गुणा करो इन दोनों प्रश्नों का यही अर्थ है कि ३ क को २ अ बार घटाना है इसलिये ३ क को २ अ बार जोड़ें तो इस घात और पहिली घात में केवल चिन्ह का ही अंतर होगा इसलिये घात - ६ अ क के तुल्य होगा ॥

तीसरे जो दोनों राशि चरण हों जैसे - २ अ और - ३ क को गुणा करो इसका यह अर्थ है - ३ क को २ अ बार अर्थात् - ६ अ क घटाना है परन्तु (१६ प्रक्रम) - ६ अ क को जो घटावेंगे तो उस के चिन्ह को बदल देवेंगे जैसे + ६ अ क लिखेंगे और इसका यह अर्थ है कि ६ अ क जोड़ना है ॥

ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन सब को दृकड़ कारको लिखते हैं ॥

+ ३ क को + २ अ से गुणा तो घात + ६ अ क हुआ ॥

- ३ क को + २ अ से गुणा तो घात - ६ अ क हुआ ॥

+ ३ क को - २ अ से गुणा तो घात - ६ अ क हुआ ॥

- ३ क को - २ अ से गुणा तो घात + ६ अ क हुआ ॥

## रीति

जिन एक पद की राशियों का गुणा करना हो उनके अक्षरों को पास पास लिखो वेही घात के गुणक रूप अवयव होंगे फिर इनके गुणको अंको को गुणा कर घात का गुण

जानो और जो दोनों पद के चिन्ह एक से हों तो घात का चिन्ह धन मानो और जो दोनों पद के चिन्ह एक से न हों तो घात का चिन्ह ऋण रखो ॥

॥ उदाहरण ॥

२य × ५ र = १० यर, -३ × ५ अ = -१५ अ ७ म × - न = -७ मन, २ अक × ३ अग = ६ अकग, -७ अयर × ४ अकग = -२८ अकग यर, २ अ × ३क × ४ग = ६ अक × ४ग = ६ × ४ × अकग = २४ अकग ॥

२२ प्र० जब कि दो वा अधिक पद की राशियों को एक पद की राशि से गुणा करना हो ॥

कल्पना करो अ + क + ग + आदि को म से गुणा करना है तो अ को म बार गुणा करना तो घात म अ के तुल्य हुआ क को म से गुणा किया तो म क हुआ ग को म से गुणा किया तो म ग हुआ, आदि और इन घातों का योग म अ + म क + म ग आदि दृष्ट घात के तुल्य हुआ क्योंकि यह प्रत्यक्ष है कि जिन खंडों में संपूर्ण राशि बनी है उनको प्रत्यक्ष म से गुणा कर घातों को जोड़ दिया उसका यही अर्थ है कि संपूर्ण राशि म से गुणी गई है और वह योग संपूर्ण घात के तुल्य है इसी यह रीति निकलती है कि (२१ प्रक्रम) के अनुसार गुण्य के प्रत्येक पद को गुदा २ गुणक के पद से गुण लो तो उन्ही घातों का योग दृष्ट घात के तुल्य होगा ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) अ + क - ग को २ से गुणा तो घात = २ अ + २ क - २ ग ॥

(२) अ-क+ग को-२ तथा = अ+क-२ ग ॥

(३) अ-क+ग को घ तथा = अघ-कघ+गघ-गघ

(४) अ-क+ग को-घ तथा = अघ+कघ-गघ ॥

(५) अय+कर को ग तथा = अयय+कगर ॥

(६) अय+कर-गल को २ तथा = २अपय+२कपर-२गपल ॥

(७) २अ+३क-४ग को २ तथा = ४अय+६कय-८गय

(८) अघ+कर को-अप तथा = अय<sup>३</sup>+अकपर ॥

(९) अय+कर को-कर तथा = अकपर-कर<sup>२</sup> ॥

(१०) ७य-४र+६को ३ तथा = २१य-१२यर+१८व ॥

(११) ६य-१३य+९को ५ तथा = ३०य-६५य+५ ॥

(१२) य-पय+फ को पय तथा = पय-पय+पफय ॥

(१३) जिन दो शशियों को गुणा करना हो उनमें जो प्रत्येक शब्द में हो वा अधिक पद हों तौ उनको गुणा करने की रीति लिखते हैं ॥

कल्पना करो कि अ+क को ग+घ से गुणा करना है तो इसका यह अर्थ है कि अ+क को ग बार जोड़ना है और फिर उसे ही घ बार जोड़ना है (२२ प्रक्रम की रीति के अनुसार अ+क को ग से गुणा तौ घात अग+कग हुआ) और ए-से ही अ+क को व से गुणा तौ घात अघ+कघ हुआ इसलिये अ+क को ग और घ वा ग+घ से गुणा तौ अग+कग+अघ+कघ इष्ट घात हुआ ॥

जो अ+क को ग-घ से गुणा करना हो तौ इसका तुम यह अर्थ समझो कि अ-क को ग बार जोड़ना है

और उसेही धवार घटाना है ॥

अ + क को ग से गुणा तो अग + कग घात हुआ और  
अ + क को घ से गुणा तो अघ + कघ घात हुआ इसे अगले  
घात से १९ प्रक्रम के अनुसार घटाया तो अग + कग  
- अघ - कघ यही दृष्ट घात हुआ ॥

जो अ - क को ग - घ से गुणा करना हो तो तुम इसका  
यह अर्थ समझो कि अ - क को गवार गुणा करना है  
और उस में से अ + क को घवार घटाना है इसलिये अग +  
कग में से अघ - कघ घटाया तो अग - कग - अघ + कघ  
दृष्ट घात हुआ ॥

॥ ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन्हें ॥

इकट्ठा करके लिखते हैं

अ + क को ग + घ से गुणा तो घात = अग + कग + अघ +  
कघ ॥

अ + क को ग - घ से तथा = अघ + कग - अघ - कघ ॥

अ - क को ग - घ से तथा = अग - कग - अघ + कघ ॥

॥ ऐसे ही और उदाहरणों से भी यह रीति निकलती है ॥

॥ रीति ॥

गुण्य के हर एक पद को गुणक के हर एक पद  
से गुणा करो इनही बातों का योग संपूर्ण घात के तु-  
ल्य होगा ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) ५ + २ को

५ × २ से गुणा करो ॥



$\overset{२}{य} + \overset{२}{य}$  यह घात गुण्य को  $\overset{२}{य}$  से गुणा तो हुआ ॥  
 $+ \overset{२}{२य} + \overset{२}{२य}$  यह घात गुण्य को  $\overset{२}{२}$  से गुणा तो हुआ ॥

$\overset{२}{य} + \overset{२}{३य} + \overset{२}{२}$  संपूर्ण घात हुआ

(२)  $\overset{२}{२१}$  वा  $\overset{२}{२०} + \overset{२}{१}$  को  
 $\overset{२}{१६}$  वा  $\overset{२}{२०} - \overset{२}{१}$  से गुणा करो ॥

$\overset{२}{१६६}, \overset{२}{४००} + \overset{२}{२०}$

$\overset{२}{२१०} - \overset{२}{२०} - \overset{२}{१}$

$\overset{२}{३६६}$  वा  $\overset{२}{४००} - \overset{२}{१}$

(३)  $\overset{२}{२} + \overset{२}{अ}$  को

$\overset{२}{३}$ -क से गुणा करो ।

$\overset{२}{६} + \overset{२}{३अ}$  यह घात गुण्य को  $\overset{२}{३}$  से गुणा तो हुआ ॥

$\overset{२}{-२क} - \overset{२}{अक}$  यह घात गुण्य को  $\overset{२}{-क}$  से गुणा तो हुआ

$\overset{२}{६} + \overset{२}{३अ} - \overset{२}{२क} - \overset{२}{अक}$  संपूर्ण घात हुआ

(४)  $\overset{२}{अ} + \overset{२}{क}$  को

$\overset{२}{अक}$  से गुणा करो

$\overset{२}{अ} + \overset{२}{अक}$  यह घात गुण्य को  $\overset{२}{अ}$  से गुणा तो हुआ ॥

$+ \overset{२}{अक} + \overset{२}{क}$  यह घात गुण्य को  $\overset{२}{क}$  से गुणा तो हुआ ॥

$\overset{२}{अ} + \overset{२}{२अक} + \overset{२}{क}$  संपूर्ण घात

(५)  $\overset{२}{अ} - \overset{२}{क}$  को

$\overset{२}{अ} - \overset{२}{क}$  से

$\overset{२}{अ} - \overset{२}{अक}$  यह घात गुण्य को  $\overset{२}{अ}$  से गुणा तो हुआ ॥

-<sup>२</sup>अक + क<sup>२</sup> यह घात गुण्यको -क से गुणा तो हुआ

<sup>२</sup>अ-<sup>२</sup>अक + क<sup>२</sup> संपूर्ण घात हुआ

(६) य-<sup>२</sup>र को

<sup>२</sup>य + <sup>३</sup>र से गुणा करो

<sup>२</sup>य-<sup>४</sup>य<sup>२</sup> यह घात गुण्यको <sup>२</sup>य से गुणा तो हुआ  
+ <sup>३</sup>य<sup>२</sup>-<sup>६</sup>र<sup>२</sup> यह घात गुण्यको <sup>३</sup>र से गुणा तो हुआ

<sup>२</sup>य-<sup>६</sup>य<sup>२</sup>-<sup>६</sup>र<sup>२</sup> संपूर्ण घात हुआ

अब एक ऐसी उदाहरण लिखते हैं जिसके गुण्य और गुणाक दो  
गोभे हो दो पद से अधिक पद हैं ॥

<sup>२</sup>अ + <sup>३</sup>क - <sup>४</sup>ग को

<sup>२</sup>अ + क - ग से गुणा करो ॥

<sup>२</sup>अ + <sup>३</sup>अक - <sup>४</sup>अग यह घात गुण्यको <sup>२</sup>अ से गुणा  
तो हुआ

+ <sup>२</sup>अक + <sup>३</sup>क - <sup>४</sup>कग तथा + क से  
- <sup>२</sup>अग - <sup>३</sup>कग + <sup>४</sup>ग<sup>२</sup> तथा - ग से

<sup>२</sup>अ + <sup>५</sup>अक - <sup>६</sup>अग + <sup>३</sup>क - <sup>७</sup>कग + <sup>४</sup>ग<sup>२</sup> संपूर्ण घात  
हुआ ॥

॥२४॥ प्रक्रमके अनुसार एक राशिके घातोंके गुणा करनेकी रीति ॥

एक ही राशिके जिन भिन्न घातों को गुणा करना हो उन  
के घात प्रकाशक का योग करो वही योग इष्ट घात का घात

प्रकाशक होगा ॥

जैसे  $\text{अ}^2 \times \text{अ}^3 = \text{अ}^5$  क्योंकि प्रक्रम ८ के अनुसार  
 $\text{अ}^2 = \text{अ} \times \text{अ}$  और  $\text{अ}^3 = \text{अ} \times \text{अ} \times \text{अ}$  इसलिये  $\text{अ}^2 \times \text{अ}^3 =$   
 $\text{अ} \times \text{अ} \times \text{अ} \times \text{अ} \times \text{अ} = \text{अ} \text{अ} \text{अ} \text{अ} \text{अ} = \text{अ}^5$  इसी रीति से  
 यह भी जानो कि  $\text{अ}^5 \times \text{अ}^6 = \text{अ}^{11}$  और ऐसे ही जो और  
 घात प्रकाशक अंक हों तो घातों का गुणा करने में योग  
 होता है ॥

जैसे  $\text{अ}^m \times \text{अ}^n = \text{अ}^{m+n}$  इस उदाहरण में म और  
 न के स्थान में चाहे सौ अंक रखो ॥

॥ ६ प्रक्रम की परिभाषा के अनुसार ॥

$\text{अ}^m = \text{अ} - \text{अ} - \text{अ} - \text{अ}$  आदि अ से अ को गुणा करते चले जा-  
 ओ जब तक गुणक रूप अवयवों का परिमाण म हो और  
 ऐसे ही

$\text{अ}^m \times \text{अ}^n = \text{अ} - \text{अ} - \text{अ} - \text{अ}$  आदि अ से अ को गुणा करते चले  
 जाओ जब तक गुणक रूप अवयवों का परिमाण न हो ॥

$\therefore \text{अ}^m \times \text{अ}^n = \text{अ} - \text{अ} - \text{अ} - \text{अ}$  आदि म गुणक रूप अवयवों तक  
 गुणा करो ॥

$\times \text{अ} - \text{अ} - \text{अ} - \text{अ}$  आदि न गुणक रूप अवयवों तक गुणा करो  
 $= \text{अ} - \text{अ} - \text{अ} - \text{अ}$  आदि जब तक गुणक रूप अवयवों का  
 परिमाण  $m+n$  हो ॥

$m+n$  परिभाषा के अनुसार  
 $= \text{अ}^{m+n}$

अनुमान जो अ के स्थान में अ + क वा अ + क + ग वा  
 और कोई राशि लिखें तो उसके भिन्न घातों को गुणा करें  
 गे तो उनके घात प्रकाशक का योग कर लेंगे ॥

जैसे अंक के दूसरे घात को उसी राशि के तीसरे घात से गुणा करें तो दृष्ट घात उसी राशि के पाँचवें घात के तुल्य होगा ॥

॥उदाहरण॥

- (१) ३य<sup>३</sup> × ३य<sup>३</sup> = ३ × ३ × ३य<sup>३</sup> = ६य<sup>३</sup> ÷
- (२) ७अय<sup>२</sup> × २अय<sup>२</sup> = ७ × २अअय<sup>२</sup> = १४अय<sup>२</sup>
- (३) ५अकग<sup>२</sup> × अकग<sup>२</sup> = ५अअककग<sup>२</sup> = ५अकग<sup>४</sup> ॥
- (४) ३य<sup>२</sup>रेले<sup>२</sup> × ४य<sup>२</sup>रेले<sup>२</sup> = ३ × ४य<sup>४</sup>य<sup>४</sup>रेरेलेले<sup>४</sup> = १२य<sup>४</sup>रेले<sup>४</sup> ॥
- (५) मनय<sup>२</sup> × पद = मनपय<sup>२</sup> ॥
- (६) ४अकगय<sup>२</sup> × २अगय<sup>२</sup> = ८अअकगगय<sup>२</sup> = ८अकगय<sup>४</sup> ॥
- (७) २अ<sup>३</sup> × ३अ<sup>३</sup> = २ × ३ × अअअ = ६अ<sup>३</sup> ॥
- (८) अय<sup>३</sup> × कय<sup>३</sup> = अकय<sup>३</sup> य<sup>३</sup> = अकय<sup>३</sup> य<sup>३</sup> ॥
- (९) अय<sup>३</sup> × कय<sup>३</sup> × गय<sup>३</sup> = अकगय<sup>३</sup> य<sup>३</sup> = अकगय<sup>३</sup> य<sup>३</sup> ॥
- (१०) २अय<sup>२</sup> × ३कर<sup>२</sup> × अय<sup>२</sup> = २ × ३ × अय<sup>४</sup> कर<sup>२</sup> = ६अय<sup>४</sup> कर<sup>२</sup> ॥

॥उदाहरण॥

- (१) अय<sup>२</sup>रकोक से गुणा करो ॥
- (२) ३मन को - ५ से गुणा करो ॥
- (३) ३म + न - ५को ३ से गुणा करो ॥
- (४) अय + कय को ५ से गुणा करो ॥
- (५) अय + २कय को २अ से गुणा करो ॥
- (६) ४अ - २अवर को अय से गुणा करो ॥
- (७) ३य - २य + ६को - यर से गुणा करो ॥
- (८) १ - २अय + ३कय को ३न से गुणा करो ॥

- (६) २ अ क-३ अ ग+५ क घ को-२ य से गुणा करो ॥
- (७) २ य र-३ को ७ य से गुणा करो ॥
- (८) अ य+ कर-गल को २ य र ल से गुणा करो ॥
- (९) २ अ-क य+घ को क र से गुणा करो ॥
- (१०) अ+य को क+र से गुणा करो ॥
- (११) ६ य+४ को य-१ से गुणा करो ॥
- (१२) य-४ को य+३ से गुणा करो ॥
- (१३) २ य-५ को ३ य-२ से गुणा करो ॥
- (१४) १-य को य+१ से गुणा करो ॥
- (१५) १-य को १-२ य से गुणा करो ॥
- (१६) अ य+कर को २ य-२ से गुणा करो ॥
- (१७) अ+२ य को अ-३ य से गुणा करो ॥
- (१८) ७ य-१ को ५ य-४ से गुणा करो ॥
- (१९) २ अ य-३ कर को ४ र-३ य से गुणा करो ॥
- (२०) १-२ म न को २ म+न से गुणा करो ॥
- (२१) अ-क ग को अ ग-क से गुणा करो ॥
- (२२) १+२ य+३ र को य-२ से गुणा करो ॥
- (२३) अ अ-र को क-र से गुणा करो ॥
- (२४) अ ग-क ग+अ क को २ अ-क से गुणा करो ॥
- (२५) अ अ+अ+१ को अ-१ से गुणा करो ॥
- (२६) य+अ य+अ य+अ को य-अ से गुणा करो ॥
- (२७) ४ य-६ य+८ को २ य+३ से गुणा करो ॥
- (२८) ४+२ य+य को ४-३ य+य से गुणा करो ॥
- (२९) अ-२ य को अ-य से गुणा करो ॥

(३३) य + ३ य + ८ य + २७ को य - ३ से गुणा करो ॥

(३४) २ अ य + ३ क र को २ अ य - ३ क र से गुणा करो

(३५) २ अ - ३ अ क + क को २ अ + ३ अ क - क से गुणा करो ॥

### ॥ भाग देना ॥

भाज्य भाजक और लाब्धि इन शब्दों का जो अर्थ अंक गणित में है वही अर्थ उनका बीजगणित में भी है एक राशि में दूसरी राशि का भाग देने से यह अर्थ समको कि पहिली राशि में दूसरी राशि के बारजा सकती है और जो लाब्धि को भाजक से गुणा करो तो घात भाज्यके तुल्य होगा ॥

॥ (३५) ॥ एक पद में एक पदके भाग देने की रीति ॥

क्यों कि लाब्धि × भाजक = भाज्य इसलिये जो भाज्य के दो ऐसे गुणक रूप अवयव करले कि एक गुणकरूप अवयव भाजकके समान हो तो दूसरा गुणकरूप अवयव लाब्धिके तुल्य होगा ॥

जैसे ३५ में ५ का भाग दे तो क्योंकि ३५ में ५ का ३ गुण है इसलिये ३ लाब्धि होगी और जो ३५ में ३ का भाग देना हो तो क्योंकि ३५ में ३ का ५ गुण है इसलिये ५ लाब्धि हुई ॥

इससे यह बात निकलती है कि जो एक पद में दूसरे पदका निशेष भाग लग जाय तो भाग देने की यह रीति है कि भाज्य के दो ऐसे गुणकरूप अवयव कर लो जिनमें एक गुणकरूप अवयव भाजक हो तो दूसरा गुणकरूप अवयव लाब्धि होगा ॥

## ॥ उदाहरण ॥

(१) ६ अक्षरों में २ अक्षरों का भाग दो ॥

६ अक्षर = २ अक्षर × ३ ग इसकारण ३ ग लब्धि हुई

(२) १० अक्षरों में २ अक्षरों का भाग दो ॥

१० अक्षर = २ अक्षर × ५ ग इसलिये ५ ग लब्धि हुई ॥

(३) - ७ अक्षरों में ७ अक्षरों का भाग दो ॥

७ अक्षर = ७ अक्षर × - १ इसलिये - १ ग लब्धि हुई ॥

(४) ६ मन अक्षरों में - १ मन अक्षरों का भाग दो ॥

६ मन अक्षर = - १ मन अक्षर × - ६ न इसलिये - ६ न लब्धि हुई ॥

(५) - १४ अक्षरों में - २ अक्षरों का भाग दो ॥

- १४ अक्षर = - २ अक्षर × ७ अक्षर इसलिये ७ अक्षर लब्धि हुई ॥

(६) - ८ अक्षरों में ४ अक्षरों का भाग दो ॥

८ अक्षर = ४ अक्षर × - २ अक्षरों इसलिये - २ अक्षरों लब्धि हुई ॥

(७) ५ अक्षरों में ५ अक्षरों का भाग दो ॥

५ अक्षर = ५ अक्षर × १ अक्षर इसलिये १ अक्षर लब्धि हुई ॥

(८) २१ मन अक्षरों में ३ मन अक्षरों का भाग दो ॥

२१ मन अक्षर = ३ मन अक्षर × ७ अक्षरों इसलिये ७ अक्षरों लब्धि हुई ॥

॥ (२६) जब कि एक राशि में दो वा अधिक पद हों उसमें एक

॥ पद को भाग देने की रीति ॥

क्योंकि २२ अक्षरों के अक्षरों अक्षर + क + ग + आदिको मसे गुणा लो मअ + मक + मग + आदि यह घात हुआ इसलिये मअ +

म क + म ग + आदि में म का भाग दिया तो अ + क + ग + आदि लब्धि हुई इस्ते यह रीति निकलती है ॥

॥ रीति ॥

भाज्य के हर एक पद में भाजक का २५ प्रक्रम के अनुसार भाग दो तो इन सब लब्धियों का योग संपूर्ण लब्धि के तुल्य होगा ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) अ क + २ अ ग - ३ अ घ में अ का भाग दो ॥

अ क ÷ अ = क, + २ अ ग ÷ अ = + २ ग, - ३ अ घ ÷ अ = - ३ घ इसलिये संपूर्ण राशि में अ का भाग देने से क + २ ग - ३ घ संपूर्ण लब्धि हुई ॥

(२) म य + न य - प य में य का भाग दो ॥

म य ÷ य = म, + न य ÷ य = + न य - प य ÷ य = - प य इसलिये संपूर्ण राशि में य का भाग देने से म + न य - प य संपूर्ण लब्धि हुई ॥

(३) ४ अ य - २ अ क य + २ अ य में २ अ य का भाग दो ॥

४ अ य ÷ २ अ य = २ अ य - २ अ क य ÷ २ अ य = - ३ अ क + २ अ य ÷ २ अ य = + य इसलिये २ अ य - ३ अ क + य संपूर्ण लब्धि हुई ॥

॥ (२९) जब भाजक में दो वा अधिक पद हों तो

भाग देने की रीति लिखते हैं ॥

॥ रीति ॥

प्रथम भाज्य और भाजक दोनों के पदों को इस क्रम से लिखो कि किसी अक्षर के प्रत्येक घात में जो सबसे बड़ा घात पहिले पद में लिखा जाय उससे छोटा घात दूसरे पद



में लिखो और ऐसे ही और जो घात हों उन्हें स्थापन करो वा जो सब से छोटा घात पद में लिखा जाय तो उसे बड़े घात को दूसरे पद में लिखो और इसी क्रम से सब घातों को स्थापन करो

दूसरे २४ प्रकाम के अनुसार देखो कि भाज्य के पहिले पद में भाजक का पहिला पद कैवार जा सकता है और इसे लब्धि के स्थान में रक्खो ॥

तीसरे इस लब्धि से संपूर्ण भाजक को गुणाकर घात को भाज्य से घटाओ ॥

चौथे और शेष को नया भाज्य मान ऊपर की क्रिया करो और जो लब्धि मिले उसे पूर्व लब्धि के दाहिनी ओर रक्खो और यह क्रिया वहाँ तक करो जब कि शेष ० रह जाय वा भाज्य भाजक से कम तो सब लब्धियों का योग संपूर्ण लब्धि होगी ॥

ऊपर जो भाग देने की रीति लिखी है वह अंक गणित के भाग देने की रीति से मिलती है ॥

जैसे जो तीन हजार चौरासी में, बत्तीस का भाग देना होता है तो हम भाज्य और भाजक को १० के घातों के अनुसार क्रम से लिखते हैं ॥

जैसे भाजक ३२ यों लिखते हैं और इसका यह अर्थ है  $3 \times 10 + 2$  और ऐसे ही भाज्य ३८४ का अर्थ है  $3 \times 10 + 0 \times 10 + 4$  तो भाग देने से हम यह देखते हैं कि भाजक का पहिला पद वा  $3 \times 10$  वा ३० भाज्य के पहिले पद वा  $3 \times 10$  वा ३० में १० बार जा सकता है इसलिये १० लब्धि का एक भाग हुआ फिर १० गुणा ३२ वा ३२० को ३८४ में से घटाया तो शेष ६४ रहा इसी नया भाज्य मान इस में ३२ का भाग

दिया तो शरीलब्धि मिली इसे पूर्व लब्धि १० में जोड़ा तो  
१० + २ वा १२ संपूर्ण लब्धि मिली ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) अग + कग + अघ + कघ में अ + क का भाग दो दू  
स उदाहरण में अ अक्षर के क्रम से भाज्य और भाजक के पदों  
को लिखा ॥

भाजक	भाज्य	लब्धि
अ + क	अग + कग + अघ + कघ	( ग + घ
	<u>अग + कग</u>	
	+ अघ + कघ	
	+ अघ + कघ	
	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	
	०	

∴ ग + घ लब्धि हुई ॥

ऊपर जो उदाहरण लिखा है उस में पहिले तो ह  
म यह देखते हैं कि अ ग में अ, ग बार जा सकता है इस  
लिये हमने ग, को लब्धि का अंश मान उसे भाज्य के दाहि  
नी ओर रक्खा फिर अ + क भाजक को ग, से गुणा कर

अग + कग घात को भाज्य में से घटाया तो + अघ +  
कघ शेष रहा इस शेष को नया भाज्य मान इस में अ का  
भाग दिया तो + घ लब्धि का दूसरा अंश मिला, इसे प  
र्व लब्धि ग के दाहिनी ओर रक्खा तो ग + घ संपूर्ण लब्धि  
हुई और भाग देने के पीछे शेष कुछ न रहा

(३) उ० अ + क - २ अक में अ - क का भाग दो ॥

भाज्य और भाजक के पदों को अ के घातों के अनुसार  
 रखा तो अ-क भाजक और अ-२अक+क भाज्य हुआ  
 अ-क) अ-२अक+क (अ-क लाभ हुआ ॥  
 अ-अक

—अक+क

—अक+क

हम देखते हैं कि अमें अ, अ बार जा सकता है यह  
 लाभ का पहला पद हुआ फिर अ-क भाजक को अ से  
 गुणा तो अ-अक घात हुआ इसे भाज्य में से घटाया  
 तो -अक+क शेष रहा इसके -अक पद में, अ का  
 भाग दिया तो -कलभिका दूसरा पद मिला फिर अ  
 -क भाजक को -क से गुणा कर घात -अक+क को  
 पूर्व शेष में से घटाया तो शेष ० रही, दूसर लिये अ-क  
 संपूर्ण लाभ हुआ

३३० २अ+३क+४ग+५अक-६अग-७कग  
 में अ+क-ग का भाग हो ॥

पदों को अ के घातों के अनुसार स्थापन किया ॥

अ+क-ग) २अ+५अक+६अग+३क-७कग+  
 ४ग २अ+३क-४ग

२अ+२अक-२अग

+३अक-४अग+३क-७कग+४ग  
 +३अक +३क-३कग

$$\begin{aligned} & - ४अग - ४कग + ४ग \\ & - ४अग - ४कग + ४ग \end{aligned}$$

०

∴ २अ + ३क - ४ग संपूर्ण लब्धि हुई ॥

४ जु० ६४ - अ में २ - अ का भाग दो

$$२ - अ) ६४ - अ ( ३२ + १६अ + ८अ + ४अ + २अ + अ$$

$$६४ - ३२अ$$

$$\hline ३२अ - अ$$

$$३२अ - १६अ$$

$$\hline १६अ - अ$$

$$१६अ - ८अ$$

$$\hline ८अ - अ$$

$$८अ - ४अ$$

$$\hline ४अ - अ$$

$$४अ - २अ$$

$$\hline २अ - अ$$

०

इसलिये ३२ + १६अ + ८अ + ४अ + २अ + अ लब्धि हुई ॥

॥ ६. अभ्यासके लिये उदाहरण ॥

(१) ७ य में ७ का भाग दो ॥

(२) ७ य में ७ का भाग दो ॥

(३) ७ अ य में अ का भाग दो ॥

(४) ७ अ य में ७ य का भाग दो ॥

- (५) ३ अक्षरों में अक्षरों का भाग दो ॥
- (६) ३ अक्षरों में अक्षरों का भाग दो ॥
- (७) — अक्षरों में अक्षरों का भाग दो ॥
- (८) अक्षरों में — अक्षरों का भाग दो ॥
- (९) ६ अक्षरों में — २ अक्षरों का भाग दो ॥
- (१०) १४ अक्षरों में ७ अक्षरों का भाग दो ॥
- (११) — ७ अक्षरों में ३ अक्षरों का भाग दो ॥
- (१२) — ३ अक्षरों में — ३ अक्षरों का भाग दो ॥
- (१३) ३ अक्षरों — २ अक्षरों में २ अक्षरों का भाग दो ॥
- (१४) ४ अक्षरों — २ अक्षरों में २ अक्षरों का भाग दो ॥
- (१५) ८ अक्षरों — २ अक्षरों में २ अक्षरों का भाग दो ॥
- (१६) ३ अक्षरों + २४ अक्षरों — २ अक्षरों में — २ अक्षरों का भाग दो ॥
- (१७) ४ अक्षरों — ८ अक्षरों — २ अक्षरों में — २ अक्षरों का भाग दो ॥
- (१८) अक्षरों — ५ अक्षरों + ६ अक्षरों में अक्षरों का भाग दो ॥
- (१९) अक्षरों + ३ अक्षरों + २ अक्षरों + २ अक्षरों का भाग दो ॥
- (२०) अक्षरों — अक्षरों + अक्षरों — अक्षरों में अक्षरों का भाग दो ॥
- (२१) अक्षरों + ३ अक्षरों — २ अक्षरों — अक्षरों में २ + अक्षरों का भाग दो ॥
- (२२) ४ अक्षरों — १५ अक्षरों — ४ अक्षरों में २ अक्षरों + ३ अक्षरों का भाग दो ॥
- (२३) २ अक्षरों + अक्षरों — ६ अक्षरों में २ अक्षरों — ३ अक्षरों का भाग दो ॥
- (२४) २ अक्षरों + ६ अक्षरों — ८ अक्षरों में १ + ३ अक्षरों — ४ अक्षरों का भाग दो ॥
- (२५) ३ अक्षरों + १६ अक्षरों — ३ अक्षरों में अक्षरों + ७ अक्षरों का भाग दो ॥
- (२६) ३ अक्षरों + १४ अक्षरों + ६ अक्षरों + २ अक्षरों में अक्षरों + ५ अक्षरों + १ अक्षरों का भाग दो ॥
- (२७) अक्षरों + २ अक्षरों — ३ अक्षरों — ४ अक्षरों — अक्षरों — अक्षरों में २ अक्षरों + ३ अक्षरों का भाग दो ॥

(२८) १५ अ<sup>४</sup> + १० अ<sup>३</sup> य + ४ अ<sup>२</sup> य<sup>२</sup> + ६ अ<sup>२</sup> य - ३ य<sup>४</sup> में ३ अ<sup>३</sup> - य + २ अ<sup>२</sup> य का भाग हो ॥

(२९) व प<sup>३</sup> + ३ प<sup>२</sup> व - २ प व<sup>३</sup> - २ व<sup>४</sup> में प - व का भाग हो ॥

(३०) अ<sup>३</sup> य + अ<sup>२</sup> य - २ अ<sup>२</sup> क य + क य<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup> क - २ अ<sup>२</sup> क में अ<sup>२</sup> य - क य + अ<sup>२</sup> - अ<sup>२</sup> क का भाग हो ॥

(३१) ३२ य<sup>४</sup> + २४३ में २ य + ३ का भाग हो ॥

### ॥ सम महत्तमापवर्तक ॥

२८ प्र० परिभाषा जिस एक राशि में दूसरी राशिका निःशेष भाग लग जाय तो पहिली राशि को अपवर्त्य कहते हैं और दूसरी को अपवर्तक इसलिये जो दोन अधिक राशियों में एक राशिका निःशेष भाग लग जाय तो उन राशियों को समापवर्तक कहते हैं क्योंकि वह सब राशियों का अपवर्तक है और इस कारण सबसे बड़े सम भाजक को सम महत्तमापवर्तक कहते हैं ॥

अपवर्तक केवल भाजक का दूसरा नाम है और अपवर्तक उस भाजक को कहते हैं जिसका भाज्य में निःशेष भाग लग जाय और एसाही अपवर्त्य भाज्य का दूसरा नाम है और अपवर्त्य ऐसे भाज्य को कहते हैं जिसमें भाजक का निःशेष भाग लग जाय ॥

जैसे १५ का ५ अपवर्तक है क्योंकि १५ में ५ का निःशेष भाग लग जाता है और इसी कारण २५ का भी ५ अपवर्तक है इसलिये १५ और २५ का ५ समापवर्तक हुआ ऐसे ही ८ और १२ का ४ समापवर्तक है और उनका ४ भी समापवर्तक है और २ से ४ बड़ा है और ८ और १२ का २ और ४ के सिवाय और कोई अंक अपवर्तक नहीं है इस कारण ८ और १२ का ४

सम महत्तमापवर्तक हुआ ॥

क्योंकि २ अ में अ, का निःशेष भाग लग सकता है और ३ अ में भी अ, का निःशेष भाग लग सकता है इस कारण २ अ और ३ अ का अ समापवर्तक हुआ और २ अ और ३ अ का कोई अपवर्तक नहीं है इसलिये उनका अ सम महत्तमापवर्तक हुआ ॥

ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उनसे यह स्पष्ट जान पड़ता है कि एक राशि का अपवर्तक उसका एक गुणकरूप अवयव होता है इसलिये जो एक राशि के संपूर्ण गुणकरूप अवयव निकाल लिये जाय तो वे सब उस राशि के अपवर्तक होंगे और ऐसे ही जो दूसरी राशि के भी अपवर्तक निकाल लिये जाय तो दोनों राशियों में जो समापवर्तक रहे एक बार देखने से ही मालूम हो जायगे और उनका घात दोनों राशियों का सम महत्तमापवर्तक होगा ॥

२६ प्र० ऐसे ही जो एक संख्या के गुणकरूप अवयव निकालने होते हैं तो हम उसमें २, ३, ४, ५, ६, आदि अंकों का भाग लगाते हैं और जिस अंक का निःशेष भाग लगता है उसका भाग देके लब्धि में फिर जो किसी अंक का निःशेष भाग लगता है तो भाग देके लब्धि ले लेते हैं और इस लब्धि में भी वही क्रिया यहाँ तक करते हैं कि पिछली लब्धि में १ के स्थान पर किसी और अंक का निःशेष भाग न लगे ॥

जैसे १८८ के गुणकरूप अवयव निकालो तो हम देखते हैं कि १८८ में २ का तो निःशेष भाग लग ही नहीं सकता परन्तु ३ का निःशेष भाग लग जाता है ॥

३	१	५	५
३		१	१
३		१	१
७			७

$\therefore १८६ = २ \times ३ \times ३ \times ७$

उसही २२४ के गुणकरूप अवयव निकालो

२	१	२	४
२	१	१	२
२		५	५
२		२	५
२		१	४
७			७

$\therefore २२४ = २ \times २ \times २ \times २ \times २ \times ७$

पहिले उदाहरण में १८६ में २ का तो निःशेष भाग लगा ही नहीं पर उसमें ३ का ३ बार निःशेष भाग लगा और ४, ५, ६, इन में से किसी एक का पिछली लाई में निःशेष भाग नहीं लगा तिसपीछे देखा तो ७ का निःशेष भाग लग गया ॥

दूसरे उदाहरण में २२४ में २ का ५ बार निःशेष भाग लगा और फिर ७ का निःशेष भाग लग गया ॥



इसलिये १८८ के २, २, २ और ७ गुणकरूप अवयव हैं और २२४ के २ २ २ २ २ और ७ गुणकरूप अवयव हैं इस कारण ७ दोनों संख्या का समापवर्तिक है और वही ७, १८८ और २२४ का सम महत्तमापवर्तिक है ॥

३८५ और ३८६ का सम महत्तमापवर्तिक निकालो ॥

५	५	७	१९
७		७	७
१९		१९	१९

∴ ३८५ = ५ × ७ × १९

२	२	३	३
२	२	३	३
३		३	३
३		३	३
१९		१९	१९

= ३८६ = २ × २ × ३ × ३ × १९

और क्योंकि ३८५ और ३८६ के गुणकरूप अवयवों में १९ सम गुणकरूप अवयव बड़ा है इस कारण इन संख्याओं का १९ सम महत्तमापवर्तिक हुआ ॥

अंक गणित में दो वा अधिक संख्याओं के अपवर्तनांक वा सम महत्तमापवर्तक निकालने की जो रीति लिखी है उसी रीति से बीजगणित में भी दो वा अधिक राशियों का सम महत्तमापवर्तक निकाल सक्ता है ॥

३० प्र० अभ्यास करने से बीजात्मक राशियों के गुणक रूप अवयव सहज में निकल आते हैं और जो एक पद की राशि हो तो उसके गुणक रूप अवयव सहज में निकल सक्ते हैं ॥

जैसे २ अ क ग = २ अ अ क ग ग ४ अ क ग = २ अ अ अ क क ग इस कारण २ अ क ग और ४ अ क ग इनका सम महत्तमापवर्तक उनको २ अ, अ, क, ग, सम गुणक रूप अवयवों के घात २ अ क ग के तुल्य है ॥

३ अ य र और ६ अ क य इनका सम महत्तमापवर्तक निकालो ॥

३ अ य र = ३ अ अ अ अ य य य य र और ।

६ अ क य = २ x ३ x अ अ क य, इनमें ३ अ अ, य सम गुणक रूप अवयव हैं इसलिये ३ x अ अ य वा ३ अ य यही सम महत्तमापवर्तक हुआ ॥

### ॥ लघुतम समापवर्त्य ॥

३१ प्र० परिभाषा जो एक राशि में दूसरी राशि का निःशेष भाग लग जाय तो पहिली राशि को अपवर्त्य कहते हैं इस कारण जो एक राशि में दो वा अधिक राशियों का पृथक् २ निःशेष भाग लग जाय तो पूर्व राशि को उन राशियों का समापवर्त्य कहते हैं और ऐसे ही जो किसी और सब से छोटी राशि में उन राशियों का निःशेष भाग लग जाय तो छोटी राशि को लघुतम समापवर्त्य ॥

जैसे ५ का १५ अपवर्त्य है क्योंकि १५ में ५ का ३ बार की भाग लग जाता है और ३ का भी १५ अपवर्त्य है क्योंकि उसमें ३ का ५ बार की भाग लग जाता है इसलिये ५ और ३ का १५ समापवर्त्य है ऐसे ही ५ और ३ के ३० और ४५ भी समापवर्त्य हैं परंतु उन सब अपवर्त्यों में १५ सबसे छोटा है इसलिये ५ और ३ का लघुतम समापवर्त्य १५ है

२ अ क, अ का अपवर्त्य है क्योंकि २ अ क में अ एक बार जा सकता है और २ अ क, क का भी अपवर्त्य है क्योंकि २ अ क में क, २ अ बार जा सकता है इसलिये अ और क का २ अ क समापवर्त्य है परंतु इसको अ और क का लघुतम समापवर्त्य इसलिये नहीं कहते कि अ और क का अ क भी समलघुतमापवर्त्य है और पहला क से छोटा है इस कारण अ और क का अ क लघुतम समापवर्त्य है ॥

ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन से यह स्पष्ट जान पड़ता है कि जब एक राशि दूसरी राशि का अपवर्त्य हो तो दूसरी राशि अपवर्त्य का एक गुणक रूप अवयव होगी और जो दो वा अधिक राशियों की एक राशि अपवर्त्य हो तो हर एक राशि अपवर्त्य का गुणक रूप अवयव होगी इससे यह बात निकलती है कि दृष्ट राशियों का घात उनका समापवर्त्य होगा परंतु यह उन राशियों का समलघुतमापवर्त्य ही बान हो ॥

जैसे २, ४, ६ का २ × ४ × ६ वा ४८ घात समापवर्त्य है परंतु २, ४, और ६ का लघुतम समापवर्त्य १२ है ॥

३२५० इस लिये जो दो वा अधिक राशियों का लघुतम समापवर्त्य बूढ़ना हो तो हर एक राशिके गुणक रूप अवयव

निकालकर एक ऐसी राशि बनाओ कि जिसमें प्रत्येक राशि के भिन्न गुणक रूप अवयव सब आजाय और किसी राशि में कोई गुणक रूप अवयव दो वा अधिक बार आया हो तो उसे जो राशि बनाओ उसमें उतने ही बार रकवो तो इस रीति से जो राशि बनेगी वह सब राशियों का लघुतम समापवत्य होगी ॥

जैसे ३, १० और ६ इनका लघुतम समापवत्य निकालो  $३ = ३ \times १, १० = २ \times ५, ६ = २ \times ३$

इसलिये ३, १०, २, ५ भिन्न गुणक रूप अवयव हैं और किसी संख्या में एक गुणक रूप अवयव दो वा अधिक बार नहीं आया इस कारण  $३ \times २ \times २ \times ५ = ६०$  यह लघुतम समापवत्य हुआ ॥

२७०, ८, १६, १० और २० इनका लघुतम समापवत्य निकालो ॥

$८ = २ \times २ \times २, १६ = २ \times २ \times २ \times २, १० = २ \times ५$  और  $२० = २ \times २ \times ५$  इनमें २ और ५ भिन्न गुणक रूप अवयव हैं परन्तु एक संख्या में २, ४ बार आया है इस कारण  $२ \times २ \times २ \times २ \times ५ = ८०$  यही लघुतम समापवत्य हुआ ॥

३३०, २५, ६५ और ८५ इनका लघुतम समापवत्य निकालो ॥

२५ =  $२ \times ५$ , ६५ =  $२ \times ३ \times ५$ , ८५ =  $२ \times ३ \times ५$  इनमें २, ३ और ५ भिन्न गुणक रूप अवयव हैं ॥

और एक राशि में २, ३ बार आया है इस कारण  $२ \times २$

$2 \times 2 \times 3 \times 2$  रूपक = २४ अक्षरक यह लघुतम समापवर्त्य हुआ ॥

४ अक्षरक, १२ अक्षरक और २० अक्षरक इनका लघुतम समापवर्त्य निकालो ॥

८ अक्षरक =  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  अक्षरक १२ अक्षरक =  $2 \times 2 \times 3 \times 2$  अक्षरक

२० अक्षरक =  $2 \times 2 \times 5$  अक्षरक इनमें २, ३, ५ और अक्षरक

भिन्न गुणकरूप अवयव हैं और २, ३, ५ बार एकांश में

आया है और अक्षरक ४ बार इस कारण  $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

अक्षरक अक्षरक = १२० अक्षरक यह लघुतम समापवर्त्य हुआ ॥

७ ॥ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

(१) १२८ और ८४ का सभ्य महत्तमापवर्तिक निकालो ॥

(२) १२५ और ८०० का

(३) ८०, १०० और १४० का

(४) अक्षरक और कक्षरक का

(५) कक्षरक और कक्षरक इनका

(६) अक्षरक और अक्षरक इनका

(७) ५ अक्षरक और २० अक्षरक का

(८) १५ अक्षरक और २५ अक्षरक का

(९) ८ अक्षरक और २७ अक्षरक का

(१०) १४ मनप और ७ मनप इनका

(११) अक्षरक और २ अक्षरक का

(१२)  $\frac{8}{5}$  अक्षरक और  $\frac{3}{5}$  अक्षरक इनका ॥

(१३) अक्षरक और अक्षरक और कक्षरक का ॥

(१४) पक्षरक, यक्षरक और अक्षरक का ॥

(१५) २१ और २४ का लघुतम समापवर्त्य निकालो ॥

(१६) १२, १६ और २० का ॥

- (७) ४, ७, ८ और १४ का ॥  
 (९) ४, ७, १४, २१ और २४ का ॥  
 (१८) १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८ और ८ का  
 (२०) ११, २२, २३ और २४ का ॥  
 (२१) अर्थ और कय इनका ॥  
 (२२) अय और रथर का ॥  
 (२३) २य, ६य और ८य का ॥  
 (२४) अक अग और कग का ॥  
 (२५) घ, र और २घर इनका ॥  
 (२६) कघ, गघ, गघ और कग का ॥

॥भिन्न ॥

भिन्न शब्द का जो अर्थ अंक गणित में है वही बीज गणित में भी है जैसे  $\frac{अ}{क}$  इसका यह अर्थ है कि एक बार संपूर्ण राशिके क तुल्य खण्ड हुए हैं और उनमें से अ के समान खंड लिये गये हैं अ अंश है और क हर, अ और क राशियों के स्थान में चाहे जो संख्या मान लो ॥

११ प्र० अब इस बात की दिशात है कि  $\frac{अ}{क}$  अके कवे भाग की तुल्य है भिन्न की परिभाषाके अनुसार  $\frac{अ}{क}$  इसका यह अर्थ है कि १ के क तुल्य खंड किये गये हैं और उनमें से अ खण्ड लिये हैं जब कि १ के ऐसे खंड भये हैं तो यह स्पष्ट दिखाई देता है कि प्रत्येक खण्ड १ का कवां भाग है और  $\frac{अ}{क}$  से यह अर्थ है कि नैसं अ भाग लिये हैं अर्थात् १ के कवां भाग को अ बार लिया है वा १ के कवां भाग को १+१+१ आदि अ तक लिया है और १+१+१ आदि अके तुल्य है इसलिये  $\frac{अ}{क}$  अके कवे भाग की तुल्य है ॥

१४ प्र० जो किसी भिन्नके अंश और हर दोनों एक राशि से गुणे जायतो भिन्नके मोलवा मान में कुछ अन्तर नहीं पड़ता ॥

जैसे  $\frac{२अ}{क} = \frac{२अ}{२अ} = \frac{३अ}{३क} = \frac{५अ}{५क}$  क्योंकि  $\frac{२अ}{२अ}$  दूसका यह अ-

र्थ है कि १ के २क तुल्य खंड हुए हैं और उन में से २अ भाग लिये हैं जो एक के २क तुल्य खंड किये जाय और १ ही के क तुल्य खण्ड किये जाय तो पहिला प्रत्येक खण्ड दूसरे प्रत्येक खण्ड से बूना होगा दूसरलिये पहिले प्रकार के जो खण्ड २अ लिये जावें और दूसरे प्रकार के अ खंड लिये जावें तो इन खण्डोंकी संख्या तुल्य होगी ॥

इस कारण  $\frac{अ}{क} = \frac{२अ}{२क}$

इसी रीति से यह भी सिद्ध हो सक्ता है कि  $\frac{अ}{क} = \frac{३अ}{३क} = \frac{५अ}{५क}$  यहाँ नके स्थान में चाहे जो संख्या मान लो ॥

$\frac{५अ}{५क}$  में एक के नक तुल्य खंड हुए हैं और  $\frac{अ}{क}$  में १ के क

तुल्य खंड हुए हैं इसलिये  $\frac{५अ}{५क}$  का प्रत्येक खंड  $\frac{अ}{क}$  के प्रत्येक खंड का  $\frac{५अ}{५क}$  भाग हो क्योंकि जब एक ही संख्या में किसी बड़ी संख्याका भाग दिया जाय और उसी संख्या में किसी छोटी संख्याका भाग दिया जाय तो पहिली लब्धि दूसरी लब्धि से छोटी होगी इसकारण १के नक भाग को नचार लें तो  $\frac{५अ}{५क} \times \frac{५क}{५क}$  के तुल्य हो ॥

(१५) प्र० क्योंकि  $\frac{५अ}{५क} = \frac{अ}{क}$  इस्ते यह बात निकलती है कि जे प्रक भिन्नके अंश और हर दोनों में एक ही राशि का भाग दिया जाय तो भिन्न का मान ज्यों का त्यों ही बना रहता है ॥

॥ उदाहरण ॥

(१)  $\frac{अ}{क} = \frac{अ \times ग}{क \times ग} = \frac{अग}{कग}$  (२)  $\frac{अ}{क} = \frac{अ \times घचज अ द}{क \times घचज अ द}$

(३)  $\frac{अ-य}{५} = \frac{२अ-२य}{२५}$  (४)  $\frac{अ-य}{५} = \frac{अ-य}{अ५}$

(५)  $\frac{१-य}{१+य} = \frac{१-य२}{१+य२}$  (६)  $\frac{१अ-क}{१अ+क} = \frac{१अक-क}{१अक+क}$

(७)  $\frac{३दअ}{९} = \frac{१दअ}{३}$  (८)  $\frac{अय-य}{२अय} = \frac{अ-य}{२अ}$

(९)  $\frac{२अय-२य}{२अय} = \frac{अय-य}{अय}$  (१०)  $\frac{अ+अक}{अ-अक} = \frac{अ+क}{अ-क}$

(११)  $\frac{१अक-३अक}{७अकग} = \frac{२अ-३क}{७ग}$

(१२)  $\frac{अय-२अय}{३अय} = \frac{१-२य}{३}$

ऊपर जो रीति लिखी है उससे भिन्नों का लघुतम वा छोटा रूप हो जाता है क्योंकि जब एक भिन्न के अंश और हर दोनों में किसी राशि का निःशेष भाग लग जाय तो उन दोनों में उस राशि का भाग देने से भिन्न का स्वरूप लघुतम हो जायगा और उसको मान में कुछ अंतर न पड़ेगा इसके उदाहरण लिखते हैं ॥

॥ ८ अभासके लिये उदाहरण ॥

(१)  $\frac{२अय}{३य}$  का लघुतम रूप करो ॥

(२)  $\frac{४अकग}{३अग}$  का तथा ॥



(३)  $\frac{२०-अकप}{२५-अ}$  का तथा

(४)  $\frac{३-अकय}{६-अय}$  का तथा

(५)  $\frac{७५-अपर}{१५-अर}$  का तथा

(६)  $\frac{अकय}{२अकय}$  का तथा

(७)  $\frac{मप-नय}{मनय}$  का तथा

(८)  $\frac{२य-३य}{५य}$  का तथा

(९)  $\frac{१४-अ + २१-अ}{७-अक}$  का तथा

(१०)  $\frac{४कग + २ग}{२अग}$  का तथा

(११)  $\frac{३अय - २य}{२अय - ३य}$  का तथा

(१२)  $\frac{ननय मप + मप}{नप - पनप + मप}$

॥भिन्नोंके जोड़ने और घटानेकी रीति ॥

॥१६५० दो वा अधिक भिन्नोंके जोड़नेकी रीति ॥

प्रथम जो सब भिन्नोंके एक ही हर हों तो उनके अंशोंको जोड़के योगके तले वही हर रखदो ॥

जैसे  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$  वैसे ही  $\frac{अ}{क} + \frac{ग}{क} = \frac{अ+ग}{क}$  ॥

क्योंकि  $\frac{अ}{क}$  और  $\frac{ग}{क}$  हर एक भिन्न में १ के क तुल्य खंड किये गये हैं और वैसे अ और ग खंड लिये गये हैं इसलिये वैसे अ और ग खंडों का योग  $\frac{अ+ग}{क}$  के तुल्य है इसका यह अर्थ है कि १ के क तुल्य खंड किये गये हैं और वैसे अ और ग खंड लिये गये हैं इस रीति से  $\frac{अ}{क} + \frac{ग}{क} + \frac{घ}{क} = \frac{अ+ग+घ}{क}$  और ऐसे ही चार वा अधिक भिन्नों का योग हो सकता है ॥

दूसरे जो भिन्नों के हर एक से न हों तो उन को स्थान में ऐसे भिन्न रक्वो कि उन के नाम में तो अंतर न हो और उन के हर एक से हों यह बात ३४ प्रक्रम के अनुसार हो सकती है, जैसे  $\frac{अ}{क}$  और  $\frac{ग}{घ}$  इन दोनों भिन्नों का जिन के हर जुड़े हैं योग करो ॥

३४ प्र० के अनुसार  $\frac{अ}{क} = \frac{अघ}{कघ}$  और  $\frac{ग}{घ} = \frac{कग}{कघ}$  इस कारण  $\frac{अ}{क} + \frac{ग}{घ} = \frac{अघ}{कघ} + \frac{कग}{कघ} = \frac{अघ+कग}{कघ}$  पहिली रीति के अनुसार ॥

$\frac{अ}{क}, \frac{ग}{घ}, \frac{ज}{ज}$  इन भिन्नों का योग करो ॥

$\frac{अ}{क} = \frac{अ घ ज}{क घ ज}, \frac{ग}{घ} = \frac{ग \times क ज}{घ \times क ज} = \frac{क ग ज}{क घ ज}$  क्योंकि ॥

५ प्रक्रम के अनुसार  $ग \times क = कग$  और  $घ \times क = कघ$  और ऐसे ही  $\frac{अ}{क} = \frac{अ घ \times क}{क घ \times क} = \frac{अ घ क}{क घ क}$  इस कारण  $\frac{अ}{क} + \frac{ग}{घ} + \frac{ज}{ज} =$

$\frac{अ घ क}{क घ क} + \frac{क ग ज}{क घ ज} + \frac{क घ क}{क घ क} = \frac{अ घ क + क ग ज + क घ क}{क घ क}$

इसी रीति से चार वा अधिक भिन्नों का योग हो सक्ता है ॥

भिन्नों के जोड़ने की जो रीति अंक गणित में लिखी है वह

ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन से निकलती है ॥

### ॥ रीति ॥

प्रत्येक भिन्न के अंश को अपना हर छोड़ औरों के हरों से गुण दो इन घातों का योग दृष्ट योग का अंश होगा और सब भिन्नों के हरों का घात दृष्ट योग का हर होगा ॥

३७ प्र० एक भिन्न में से दूसरे भिन्न के घटाने की रीति जो उदने में जो क्रिया करनी पड़ती है वही क्रिया घटाने में भी करते हैं केवल इतना अंतर है कि एक भिन्न के अंश को दूसरे भिन्न के अंश से घटा देते हैं ॥

$$\text{जैसे } \frac{अ}{क} - \frac{ग}{क} = \frac{अ-ग}{क} \text{ और } \frac{अ}{क} - \frac{ग}{घ} = \frac{अघ-कग}{क घ}$$

जो किसी राशि को भिन्न के स्वरूप में लाना चाहें तो उस के नीचे १ हर लिख दो जैसे  $अ = \frac{अ}{१}$ ,  $घ = \frac{घ}{१}$

$\frac{अ}{१} - \frac{घ}{१} = \frac{अ-घ}{१}$  आदि। इस का यह कारण है कि ३४ प्रक्रम के अनुसार  $अ = \frac{अ \times १}{१} = \frac{अ}{१}$  ॥

### ॥ उदाहरण ॥

(१)  $\frac{अ}{घ}$ ,  $\frac{क}{घ}$ , और  $\frac{ग}{घ}$  इन का योग करो इन सबों के एक से हर है इस कारण  $\frac{अ+क+ग}{घ}$  योग हुआ ॥

(२)  $\frac{अ}{घ}$  और  $\frac{क}{२घ}$  इन का योग करो इन भिन्नों के हर जुड़े

$$\frac{अ}{घ} = \frac{२अ}{२घ} \text{ इसलिये } \frac{२अ}{२घ} + \frac{क}{२घ} = \frac{२अ+क}{२घ}$$

यही योग हुआ

(3)  $\frac{2}{3}$  और  $\frac{4}{5}$  इनका योग करो

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} \therefore \text{योग} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} + \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{2 \times 5 + 4 \times 3}{3 \times 5}$$

(4)  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{3}{4}$  और  $\frac{2}{3}$  इनका योग करो ॥

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 12}{5 \times 12} = \frac{48}{60} \quad ; \quad \frac{3}{4} = \frac{3 \times 15}{4 \times 15} = \frac{45}{60}$$

$$\text{और } \frac{2}{3} = \frac{2 \times 20}{3 \times 20} = \frac{40}{60} \therefore \text{योग} = \frac{48}{60} + \frac{45}{60} +$$

$$\frac{40}{60} = \frac{133}{60} \quad \parallel$$

(5)  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$  और  $\frac{3}{4}$  इनका योग करो ॥

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 12}{2 \times 12} = \frac{6}{12} \quad ; \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{3}{4} \text{ और } \frac{1}{2} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8} \quad \parallel$$

$$\text{इसलिये योग} = \frac{6}{12} + \frac{8}{12} + \frac{6}{12} = \frac{19}{12}$$

इसका लघुतम रूप  $12$  को अनुसार  $\frac{19}{12}$  यह हुआ ॥

इस उदाहरण को जोड़ने की रीति के अनुसार किया परन्तु इसमें बहुत क्लिष्टा करनी पड़ी इसलिये हम इस उदाहरण को इस रीति से करते हैं कि हम एक भिन्न का हर उसी रीति से रखें कि उन सभी भिन्न में अंतर न पड़े ॥

$$\frac{१}{५} = \frac{६ \times १}{६ \times ५} = \frac{६}{३०}, \frac{२}{३५} = \frac{३ \times २}{३ \times ३५} = \frac{३ \times २}{६५} = \frac{३ \times २}{३ \times ३५}$$

$= \frac{३}{६५}$  योग  $= \frac{६+३+२}{६५} = \frac{११}{६५}$  यही उत्तर पहिले भी आया था हरो के लघुतम समापदार्थ में प्रत्येक भिन्न के हर का भाग निशेष लग सकता है इस लिये इन लब्धियों से अपने-अपने अंश और हर को गुणा करो तो भिन्नों के सन्तोद लघुतम रूप में हो जायेंगे ॥

### ॥ जदाहरण ॥

(१)  $\frac{५}{२}, \frac{५}{३}$  और  $\frac{५}{४}$  इनका योग करो ॥

हरों का लघुतम समावर्त्य १२ है जिसमें २, ६ बार जा सकता है ३, ४ बार और ४, ३ बार इसलिये प्रत्येक भिन्न के अंश और हर को ६, ४ और ३ से जुदा गुना गुणा  $\frac{५}{२} = \frac{६५}{१२}, \frac{५}{३} = \frac{४५}{१२}, \frac{५}{४} = \frac{३५}{१२}$  :: योग

$$\frac{६५}{१२} + \frac{४५}{१२} + \frac{३५}{१२} = \frac{१४५}{१२} \quad \parallel$$

(२)  $\frac{७५}{६}, \frac{३५}{५}$  और  $\frac{५}{३०}$  इनका योग करो ॥

इनके हरों का लघुतम रूप समच्छेद ३० है ॥

$$\frac{७५}{६} = \frac{३७५}{३०}, \frac{३५}{५} = \frac{२१५}{३०} \quad \parallel$$

$$\therefore \text{योग} = \frac{३७५}{३०} + \frac{२१५}{३०} + \frac{५}{३०} = \frac{५९५}{३०} = \frac{८६}{५} \quad \parallel$$

(३)  $\frac{५}{२५}$ ,  $\frac{५}{६५}$  और  $\frac{५}{१५}$  इनका योग करो ॥

इनके हरों का लघुतम रूप समच्छेद २५ अंक है

और यह १२ प्रक्रम के तीसरे उदाहरण में लिखा है  
और २४ अक्ष में २ अक्ष, १२ क बार जा सकता है और  
६ अक्ष, ४ बार और ८ अक्ष, ३ बार :-  $\frac{१२कय}{२४अक्ष} = \frac{१२कय}{२४अक्ष}$

$$\frac{४य}{६अक्ष} = \frac{४य}{२४अक्ष}, \frac{३य}{८अक्ष} = \frac{३य}{२४अक्ष}$$

$$\therefore \text{योग} = \frac{१२कय + ४य + ३य}{२४अक्ष} = \frac{१२कय + ७य}{२४अक्ष}$$

(७)  $\frac{२अक्ष}{७क}$  को  $\frac{८अक्ष}{७क}$  में से घटाओ

$$\frac{८अक्ष}{७क} - \frac{२अक्ष}{७क} = \frac{८अक्ष - २अक्ष}{७क} = \frac{६अक्ष}{७क} = \frac{अक्ष}{क} \parallel$$

(५)  $\frac{३य}{२४र}$  को  $\frac{३य}{४र}$  में से घटाओ,  $\frac{३य}{४र} = \frac{६ \times ३य}{६ \times ४र} =$

$$\frac{१८य}{२४र} \therefore \text{अंतर} = \frac{१८य}{२४र} - \frac{३य}{४र} = \frac{१५य}{२४र} = \frac{५य}{८र} \parallel$$

(६)  $\frac{५अक्ष}{४}$  में से  $\frac{७अक्ष}{६}$  को घटाओ इन भिन्नों को

होंका १२ लघुतम रूप समझें  $\frac{५अक्ष}{४} = \frac{१५अक्ष}{१२}$

$$\text{और } \frac{७अक्ष}{६} = \frac{१४अक्ष}{१२} \therefore \text{अंतर} = \frac{१५अक्ष}{१२}$$

$$\frac{१४अक्ष}{१२} = \frac{अक्ष}{९} \parallel$$

॥ अक्ष्यास के लिये उदाहरण ॥

(१)  $\frac{५}{५}$ ,  $\frac{२य}{५}$  और  $\frac{३य}{५}$  इनका योग करो

(२)  $\frac{२अक्ष}{३}$  और  $\frac{अक्ष}{६}$  तथा ॥

$$(३) \frac{२}{३} \cdot \frac{३}{३} \text{ और } \frac{३}{३} \text{ तथा ॥}$$

$$(४) \frac{अ+य}{५} \text{ और } \frac{अ-य}{५} \text{ इन का योग करे ॥}$$

$$(५) \frac{२य+१}{७} \text{ और } \frac{४य-५}{७} \text{ तथा ॥}$$

$$(६) \frac{२य+२}{७} \text{ और } \frac{४य-५}{१२} \text{ तथा ॥}$$

$$(७) \frac{२}{३} \cdot \frac{३}{३} \text{ और } \frac{३}{३} \text{ तथा ॥}$$

$$(८) \frac{१}{अक} \cdot \frac{३}{अक} \text{ और } \frac{३}{अक} \text{ तथा ॥}$$

$$(९) \frac{२}{५र} \cdot \frac{१}{५र} \text{ और } \frac{२}{५र} \text{ तथा ॥}$$

$$(१०) \frac{१}{अ} \cdot \frac{३}{अक} \cdot \frac{३}{अक} \text{ तथा}$$

$$(११) य, \frac{४य-५}{३} \text{ और } \frac{२य-४}{३} \text{ तथा}$$

$$(१२) \frac{४}{५}, \frac{७य-६}{३} \text{ और } \frac{४य+२}{१२} \text{ तथा ॥}$$

$$(१३) \frac{७य-५}{१०}, \frac{५}{५} \text{ और } \frac{७य+६}{२५} \text{ तथा ॥}$$

$$(१४) \frac{३}{५} \cdot \frac{१}{३य} \text{ और } \frac{३}{३य} \text{ तथा ॥}$$

$$(१५) \frac{४}{५र} \cdot \frac{२}{५र} \text{ और } \frac{४}{५र} \text{ तथा ॥}$$

(१६)  $\frac{य}{अ}, \frac{र}{क}, \frac{ल}{ग}$  तथा ॥

(१७)  $\frac{यर-अक}{अक}, \frac{यर-कग}{कग}$  और २ तथा ॥

(१८)  $\frac{अ-क}{अक}, \frac{क-ग}{कग}$  और  $\frac{ग-अ}{अग}$  ॥

(१९)  $\frac{४य}{५}$  को  $\frac{८य}{१०}$  में से घटाओ ॥

(२०)  $\frac{७य}{८}$  को  $य$  में से घटाओ ॥

(२१)  $\frac{५य+४}{६}$  को  $\frac{१०य+१७}{१८}$  तथा ॥

(२२)  $\frac{२य-३}{४}$  को  $\frac{५य-९}{८}$  तथा ॥

(२३)  $\frac{३र+य+१३}{१०}$  को  $\frac{३य+र+९}{५}$  ॥

(२४)  $\frac{१५+३य}{य+९}$  को  $७ + \frac{२४}{य+९}$  ॥

(२५)  $\frac{३}{व} + \frac{४}{य}$  को  $\frac{३}{य} + \frac{५}{व}$  तथा ॥

(२६)  $\frac{य}{य+९}$  को  $\frac{३य}{य+९}$  में से घटाओ ॥

(२७)  $\frac{२य-७}{१२}$  को  $\frac{३य+७}{१४}$  तथा

(२८)  $\frac{य}{१०} + \frac{४}{२५}$  को  $\frac{११य-१३}{२५}$  तथा ॥



$$(२६) \frac{अ}{क+गघ} \text{ को } \frac{अ}{क} \text{ तथा ॥}$$

$$(२७) \frac{२अ}{घ+र} \text{ को } \frac{घ+र}{र} \text{ तथा}$$

$$(२८) \frac{३}{२५य} \text{ को } \frac{३+२५}{२+५+२५}$$

$$(२९) \frac{घ-र}{घ+र} \text{ को } \frac{घ+र}{घ-र} \text{ ॥}$$

॥ भिन्नो के गुणा करने और भाग देने की रीति ॥  
 १. अ. प्र. भिन्न को पूर्णांक से गुणा करने की रीति ॥  
 भिन्न के अण को पूर्णांक से गुणा करो और घात के नीचे  
 भिन्न का हर रख दो। जैसे  $ग \times \frac{अ}{क} = \frac{अग}{क}$  ॥

$\frac{अ}{क}$  और  $\frac{अग}{क}$  इन दोनों भिन्नो में १ के क तुल्य खंड  
 किये हैं और  $\frac{अ}{क}$  भिन्न में वैसे तुल्य  
 खंड अलिखे हैं और  $\frac{अग}{क}$  भिन्न में अ से तुल्य खंड ग  
 वार लिखे हैं इस कारण  $\frac{अग}{क}$  भिन्न  $\frac{अ}{क}$  भिन्न की अ  
 पेसा ग वार बड़ा है ॥

॥ उदाहरण ॥

$$(१) \frac{अ}{क} \text{ को } २ \text{ से गुणा करो ॥}$$

$$\text{घात} = \frac{२अ}{क} \text{ क्योंकि दो गुणा } \frac{अ}{क} = \frac{अ}{क} + \frac{अ}{क} =$$

$$\frac{अ+अ}{क} = \frac{२अ}{क} \text{ ॥}$$

$$(२) \frac{अघ}{कर} \text{ को } ५ \text{ से गुणा करो ॥ } ५ \times \frac{अघ}{कर} = \frac{५अघ}{कर}$$

वही घात हुआ ॥

(३)  $\frac{अ-य}{अ+य}$  को ७ से गुणा करो, घात =  $7 \times \frac{अ-य}{अ+य}$

$$= \frac{7अ-7य}{अ+य} \quad \parallel$$

(४)  $\frac{अ-य}{क}$  को २ अ से गुणा करो, घात =  $२अ \times \frac{अ-य}{क}$

$$= \frac{२अ^२-२अय}{क} \quad \parallel$$

। ३६ प्र० भिन्न में पूर्णांक के भाग देने की रीति ॥

जो भिन्न के अंश में पूर्णांक का पूरा भाग लग जाय तो लक्ष्य के नीचे भिन्न के हर को रख दो वा भिन्न के हर को पूर्णांक से गुणा करो और इस घात को हर मान इस के ऊपर भिन्न का अंश लिखो, जैसे  $\frac{अ ग}{क} \div ग = \frac{अ}{क}$  और  $\frac{अ}{क} \div ग$

=  $\frac{अ}{क ग}$  क्योंकि ३६ प्र० के अनुसार ग गुणा  $\frac{अ}{क} = \frac{अ ग}{क}$   
इसलिये  $\frac{अ ग}{क}$  का ग वाँ भाग अर्थात्  $\frac{अ ग}{क} \div ग = \frac{अ}{क}$  ॥

और क्योंकि ३४ प्रक्रम के अनुसार  $\frac{अ}{क} = \frac{अ ग}{क ग}$  और

३६ प्रक्रम के अनुसार  $\frac{अ ग}{क ग} = ग गुणा \frac{अ}{क ग}$  इस कारण  $\frac{अ}{क}$  भी = ग गुणा  $\frac{अ}{क ग}$  और  $\frac{अ}{क}$  की अपेक्षा ग

गुणा बड़ा है इसलिये  $\frac{अ}{क}$  का ग वाँ भाग वा  $\frac{अ}{क} \div ग = \frac{अ}{क ग}$  भाग देने की यही रीति लिखी है ॥

## ॥ उदाहरण ॥

(१)  $\frac{२अ}{क}$  में २ का भाग दो, उत्तर  $\frac{अ}{क}$ , क्योंकि  $२अ \div २ = अ$  ॥

(२)  $\frac{मअय}{कर}$  में म का भाग दो क्योंकि  $मअय \div म = अय$  ॥  $\therefore$  लब्धि =  $\frac{अय}{कर}$  ॥

(३)  $\frac{७अ-७य}{अ+य}$  में ७ का भाग दो क्योंकि  $अंश \div ७ = अ-य$   
 $\therefore$  लब्धि =  $\frac{अ-य}{अ+य}$  ॥

(४)  $\frac{२अक-२अ}{ग}$  में २ का भाग दो ॥  
 क्योंकि  $२अक-२अ$  में २ का भाग दिया तो  $क-अ$   
 लब्धि हुई इसलिये लब्धि =  $\frac{क-अ}{ग}$  ॥

१४० प्रकम एक भिन्न को दूसरे भिन्न से गुणा करने की रीति  
 अंश को अंश से गुणा करो और हर को हर से ॥

जैसे  $\frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ} = \frac{अग}{कघ}$  ॥

$\frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ}$  इसका यह अर्थ है कि  $\frac{ग}{घ}$  को  $\frac{अ}{क}$  बार गुणा करना है  $\frac{अ}{क}$  को अगुणा किया तो  $\frac{अग}{घ}$  लब्धि हुई परन्तु १३ प्रकम के अनुसार  $\frac{अ}{क}$  का अर्थ है अका कवां भाग और  $\frac{ग}{घ}$  को अबार गुणा नहीं करना है परन्तु उसे अके कवां भाग बार गुणा करना है इस कारण  $\frac{अग}{कघ}$  का कवां भाग अर्थात्  $\frac{अग}{घ} \div क = \frac{अग}{कघ}$  ३८ प्रकम के अनुसार ॥

$\therefore \frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ} = \frac{अग}{कघ}$  - यही रीति है ॥

अनुमान क्योंकि  $\frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ} = \frac{अग}{कघ} ॥$

$\therefore \frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ} \times \frac{ज}{ज} = \frac{अग}{कघ} \times \frac{ज}{ज} = \frac{अगज}{कघज} ॥$

॥ इसी रीति से चार वा अधिक भिन्नो का गुणा हो सकता है

॥ उदाहरण ॥

(१)  $\frac{अ}{क}$  को  $\frac{ग}{घ}$  से गुणा करो उत्तर  $\frac{अग}{कघ} ॥$

(२)  $\frac{अ-य}{र}$  को  $\frac{व}{घ}$  से गुणा करो,  $\frac{व}{घ} \times \frac{अ-य}{र} = \frac{वअ-वय}{घर}$

(३)  $\frac{२अ}{३र}$  को  $\frac{क}{घ}$  से गुणा करो,  $\frac{२अ}{३र} \times \frac{क}{घ} = \frac{२अ \times क}{३र \times घ} =$

$\frac{२अक}{३रघ} ॥$

(४)  $\frac{य}{अ}$  को  $\frac{घ}{अ}$  से गुणा करो, घात  $= \frac{घ \times य}{अ \times अ} = \frac{यघ}{अ^२} ॥$

(५)  $\frac{अक}{२घर}$  को  $\frac{२अक}{५घर}$  से गुणा करो ॥

घात  $= \frac{अक \times २अक}{२घर \times ५घर} = \frac{२अ^२क^२}{१०घ^२र^२} ॥$

पाँच वें उदाहरण में जो उत्तर लिखा है उसका लघु तम रूप नहीं हुआ है क्योंकि उसके अंश और हर दोनों में २ का निःशेष भाग लग सकता है गुणा करने के पक्ष से हम देखना चाहिये था कि दृष्ट घात के अंश और हर दोनों का २ सम गुणक रूप अवयव है इस कारण उसे छोड़ देना चाहिये था क्योंकि भिन्न के अंश और हर दोनों

नें एक राशि का भाग देने से भिन्न का मान बदलता नहीं ऐसे ही जो दृष्ट घात के अंश और हर दोनों में जो एक से अधिक गुणक रूप अवयव हों तो उनको अंश और हर दोनों में से निकाल डालो इससे घात का लघुतम रूप हो जायगा ॥

॥ उदाहरण ॥

(६)  $\frac{२५}{३}$  को  $\frac{३५}{५}$  से गुणा करो ॥

$\frac{२५}{३} \times \frac{३५}{५} = \frac{२५}{५}$  घात के अंश और हर दोनों के गुणक रूप अवयव ५ को निकाल डालो ॥

(७)  $\frac{४५}{५}$  को  $\frac{५५}{४}$  से गुणा करो ॥

घात =  $\frac{४५ \times ५५}{५ \times ४}$  इसके अंश और हर दोनों में ४

और ५ गुणक रूप अवयव हैं इस कारण उनको निकाल डाला तो अंश =  $५ \times ५ = २५$  और हर =  $१ \times १ = १$  और घात =  $२५$  वा  $२५$  परंतु इस घात को एक ही बार देखकर निकाल लेना चाहिये जैसे  $\frac{४५}{५} \times \frac{५५}{४} = २५$  ॥

(८)  $\frac{२५-५}{४}$  को ४ से गुणा करो, इस प्रश्न को देखते ही

मान्य होता है कि घात =  $२५ - ५$  है क्योंकि किसी एक पदार्थ वा राशि को चौगुना को चौगुना करे तो घात संपूर्ण पदार्थ वा राशि के तुल्य होगा ॥

(९)  $\frac{२५-५}{५}$  को ५ से गुणा करो ॥

इस प्रश्न में  $२५ - ५$  में ४ का भाग लगा है और वही राशि ५ में गुणी गई है इसलिये ५ का भाग देने

और ८ से गुणा करने के स्थान में २ य—५ को २ से गुणा तो घात ४ य—१० के तुल्य हुआ ॥

(१०)  $\frac{२५-५}{१६}$  को ८ से गुणा करो ॥

$$\frac{८०}{१६} = ५ \therefore \text{घात} = ५ \text{ गुणा } २५-५ \text{ वा } १०५-२५ ॥$$

(११)  $\frac{अ+क}{अ}$  को  $\frac{अ-क}{क}$  से गुणा करो ॥

$$\text{घात} = \frac{अ+क}{अ} \times \frac{अ-क}{क} \text{ और } अ+क \text{ को } अ-क$$

से गुणा तो  $\frac{अ-क}{अक}$  हुआ इस कारण घात =  $\frac{अ-क}{अक}$

॥ ४१३० एक भिन्न में दूसरे भिन्न के भाग देने की रीति ॥

॥ रीति ॥

जो भिन्न भाजक हो उसको पलट दो अर्थात् उसके अंश के स्थान में हर रखो और हर के स्थान में अंश लिखो फिर भिन्न गुणन की रीति से दोनों भिन्नो का गुणा कर लो । जैसे  $\frac{अ}{क} \div \frac{ग}{घ} = \frac{अ}{क} \times \frac{घ}{ग} = \frac{अघ}{कग}$  ॥

क्योंकि लाघि एक ऐसी रीति होती है कि जो उसे भाजक से गुणा करो तो घात भाज्य के तुल्य होगा इस कारण जो भाज्य के ऐसे दो गुणक रूप अवयव कर लिये जाय कि उन में एक भाजक के तुल्य हो तो दूसरा गुणक रूप अवयव लाघि के तुल्य होगा ऊपर जो उदाहरण लिखा है उसमें  $\frac{अ}{क}$  भाज्य है और  $\frac{अ \times गघ}{क \times गघ} = \frac{अघ}{कगघ}$

$\frac{ग अ घ}{क ग} = \frac{ग}{घ} \times \frac{अ घ}{क ग}$  इसमें  $\frac{ग}{घ}$  गुणक रूप अवयव भाजक है इस कारण दूसरा गुणक रूप अवयव  $\frac{अ घ}{क ग}$

लक्षि है ॥

॥ उदाहरण ॥

(१)  $\frac{२}{५}$  में  $\frac{३}{४}$  का भाग दो ॥

$$\frac{२}{५} \div \frac{३}{४} = \frac{२}{५} \times \frac{४}{३} = \frac{२४}{३५} \quad \parallel$$

(२)  $\frac{अ५}{कर}$  में  $\frac{अ३}{क}$  का भाग दो ॥

$$\frac{अ५}{कर} \div \frac{अ३}{क} = \frac{अ५}{कर} \times \frac{क}{अ३} = \frac{अक५}{अकर} = \frac{५}{३} \text{ अक्षरक्रम के अनुसार ॥}$$

(३)  $\frac{२अक}{३यर}$  में  $\frac{क}{५}$  का भाग दो ॥

$$\frac{२अक}{३यर} \div \frac{क}{५} = \frac{२अक}{३यर} \times \frac{५}{क} = \frac{२अक५}{३कयर} =$$

$$\frac{२अक५}{३कयर} = \frac{२अ५}{३रक५} \quad \parallel$$

(४)  $\frac{२अक}{१०पर}$  में  $\frac{अक}{२यर}$  का भाग दो ॥

$$\frac{२अक}{१०पर} \div \frac{अक}{२यर} = \frac{२अक}{१०पर} \times \frac{२यर}{अक} =$$

$$\frac{२अ.अक.२यर}{१०पर.२पर.अक} = \frac{२अ}{५पर} \quad \parallel$$

(५)  $\frac{अ-५}{४}$  में  $\frac{२अक}{५}$  का भाग दो ॥

$$\frac{अ-५}{४} \div \frac{२अक}{५} = \frac{अ-५}{४} \times \frac{५}{२अक} = \frac{अ-५५}{८अक}$$

(६)  $\frac{अ-५}{अ५}$  में  $\frac{अ+५}{अ}$  का भाग दो ॥

$$\frac{अ-य}{अ+य} \div \frac{अ+य}{अ} = \frac{अ-य}{अ+य} \times \frac{अ}{अ+य} = \frac{अ-य}{अ+य}$$

$$\frac{अ+य}{अ} \div \frac{अ+य}{अ+य} = \frac{अ-य}{अ} \quad ||$$

(७)  $\frac{१+य^२+२य}{३य}$  को  $\frac{१+य}{२य}$  का भाग दो ॥

$$लब्धि = \frac{१+य^२+२य}{३य} \cdot \frac{२य}{१+य} = \frac{१+य}{३} \cdot \frac{१+य}{य} \cdot \frac{२य}{१+य} =$$

$$\frac{१+य}{३} \times २ = \frac{२+२य}{३} \quad ||$$

॥ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

(१)  $\frac{५}{३}$  को ३ से गुणा करो ॥ (६)  $\frac{१३+२य}{१६}$  को ८ से ॥

(२)  $\frac{३य}{२}$  को २ से ॥ (७)  $\frac{८-७य}{४३}$  को ६ से ॥

(३)  $\frac{५य}{४}$  को २ से ॥ (११)  $\frac{६य+१३}{१४}$  को १५ से ॥

(४)  $\frac{य}{३}$  को ६ से ॥ (१२)  $\frac{२य-१}{७३}$  को १५ से ॥

(५)  $\frac{अ-य}{२}$  को ४ से ॥ (१३)  $\frac{३य+४}{५३}$  को ११ से ॥

(६)  $\frac{७य}{१५}$  को ६ से ॥ (१४)  $\frac{य-१}{२३}$  को ७ से

(७)  $\frac{२य}{२२}$  को ८ से ॥ (१५)  $\frac{२३-४य}{२३}$  को १० से ॥

(८)  $\frac{३य-५}{२}$  को ६ से ॥



- |                                                         |                                                                                    |
|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| (१६) $\frac{३य}{२}$ को $\frac{१}{२}$ से ॥               | (२४) $\frac{२अप}{४र}$ में $\frac{७अ}{१}$ का ॥                                      |
| (१७) $\frac{३य}{२}$ को $\frac{२य}{३}$ से ॥              | (२५) $\frac{२मन}{५}$ में $\frac{२मका}{१}$ ॥                                        |
| (१८) $\frac{२-३य}{४}$ को $\frac{४}{५}$ से गुणा ॥        | (२६) $\frac{२य-४पर}{२}$ में $\frac{२यका}{१}$ ॥                                     |
| (१९) $\frac{१}{२य}$ को $\frac{३}{य}$ से ॥               | (२७) $\frac{३अ+४अक}{४}$ में $\frac{३अका}{१}$ ॥                                     |
| (२०) $\frac{५}{२} + \frac{२}{५}$ को $\frac{५र-२रसे}{१}$ | (२८) $\frac{५पर}{१}$ में $\frac{२य}{२}$ का ॥                                       |
| (२१) $\frac{५य}{२}$ में $\frac{५का}{१}$ भाग दो ॥        | (२९) $\frac{२अकग}{३घ}$ में $\frac{अगका}{१}$ ॥                                      |
| (२२) $\frac{३य}{४}$ में $\frac{५काभागदो}{१}$            | (३०) $\frac{अपर}{२कग}$ में $\frac{अरका}{४य}$ का ॥                                  |
| (२३) $\frac{३य}{४}$ में $\frac{६काभागदो}{१}$            | (३१) $\frac{५}{२} + \frac{१}{५}$ को $\frac{५}{५} + \frac{१}{५}$ से $\frac{६का}{१}$ |

- (३३)  $\frac{१}{१+य} + \frac{१}{२-य}$  को  $\frac{१}{२}$  से ॥
- (३४)  $\frac{१-२अ}{१+अ}$  को  $\frac{१+२अ}{१-अ}$  से ॥
- (३५)  $\frac{१}{३} + \frac{म-३}{२}$  को  $\frac{३+म-३}{३}$  से
- (३६)  $\frac{अ}{क} + \frac{१}{२} - \frac{क}{अ}$  को  $\frac{क}{अ} - \frac{१}{२} - \frac{अ}{क}$  से
- (३७)  $\frac{अ-अप}{क}$  को  $\frac{क}{अ-प}$  से गुणा करो ॥
- (३८)  $\frac{अ+अप+प}{अ-अप+प}$  को  $\frac{अ-प}{अ+प}$  से ॥
- (३९)  $\frac{२ + \frac{१}{५} अं}{५} - \frac{१}{५}$  का भाग दो ॥

(४०)  $\frac{२-य}{२}$  में  $\frac{य}{१-य}$  का भाग दो ॥

(४१)  $\frac{क-२अ}{२अक}$  में  $\frac{२अक}{४अक}$  का ॥

(४२) २ में  $१ + \frac{य}{४-य}$  का भाग दो ॥

(४३)  $\frac{१}{३}$  में  $\frac{१}{३} - \frac{य}{३}$  का भाग दो ॥

(४४)  $\frac{१}{२+य}$  में  $\frac{१}{२-२+य}$  का भाग दो ॥

(४५) अक में  $\frac{क}{अ-य}$  का भाग दो ॥

(४६)  $\frac{अ-य}{२+य}$  में  $\frac{अ-य}{अ+य}$  का भाग दो ॥

४२ प्र० जैसे एक संपूर्ण राशि के स्थान में एक अक्षर लिख लेते हैं और उस पर जो क्रिया करनी होती है उसका चिह्न उस अक्षर के साथ लगा देते हैं जैसे ही ज ब हो वा अधिकपदवा गुणक रूप अवयवों की राशि को एक संपूर्ण राशि मानते हैं तो उसे ऐसे एक कोष्ठ ( ), [ ] के भीतर लिखते हैं और

जो उस संपूर्ण राशि पर क्रिया करनी होती है उसका चिह्न कोष्ठ के साथ लगा देते हैं कोष्ठ शब्द का अर्थ कोठा है ॥

जैसे अ + (क - ग) इस का अर्थ है कि क - ग को अ में जोड़ना है अ - (क - ग) इस का अर्थ है

किक-ग जो अ में से घटाना है अ x (क-ग) इसका  
अर्थ है कि क-ग को अ से गुणा करना है (क-ग)  
÷ अ इसका अर्थ है कि क-ग में अ का भाग दे  
ना है

(क-ग) इसका अर्थ है कि क-ग का वर्ग करना है  
√(क-ग) तथा क-ग का वर्ग मूल लेना है ॥

(अक) तथा अ गुणा क का वर्ग करना है ॥  
कोष्ठ के मिलाने से राशि का अर्थ पलट जाता है जैसे

क-ग को अ बार गुणा करना दोतो अ x (क-ग) यों  
लिखेंगे और जो कोष्ठ न लिखें जैसे अ x क-ग तो य  
ह अ क-ग के तुल्य है और अ(क-ग) अक-अ  
ग के तुल्य है ऐसे ही क-ग का वर्ग लिखना हो तो

(क-ग) यों लिखेंगे और जो कोष्ठ न लिखें जैसे क-ग  
तो इसका अर्थ है कि क में से ग का वर्ग घटाना है और  
(क-ग) इसका अर्थ है कि क-ग राशि का वर्ग क  
रना है और वह क-ग का वर्ग के तुल्य है ॥

४३५० कोष्ठ के स्थान में संपूर्ण पद वा गुणक रूप अ व  
यनों को ऊपर एक ————— ऐसी सीधी रेखा कर देते हैं  
और उसे अंखल कहते हैं अंखल शब्द का अर्थ साफ  
बनाजंजीर है ॥

जैसे अ-क-ग इसका वही अर्थ है जो अ-  
(क-ग) का है √क-ग इसका वही अर्थ है जो  
√(क-ग) का है ॥

क-ग तथा (क-ग) का है ॥

और यह बात भी याद रखो कि निम्न के अंश और

हर दोनों के बीच जो रेखा होती है उसे अंश और हर दोनों का शृंखल जानो ॥

जैसे क-ग इसका वह अर्थ है जो क-ग = अ

का है ब क-ग ÷ अ का है और  $\frac{अ-क}{ग-घ}$  इसका भी वही जो अ-क ÷ ग-घ वा (अ-क) ÷ (ग-घ) का अर्थ है ॥

४४ प्र० कोष्ठ वा शृंखल के साथ जिस क्रिया का चिन्ह लगा हो जब तक वह क्रिया पूरी नहीं जाय तब तक उस कोष्ठ वा शृंखल को मत मिटाओ ॥

जैसे अ + (क-ग) यह कोष्ठ केवल इसी अर्थ से रखा है कि क-ग संपूर्ण राशि को अ में जोड़ना है और इसलिये इस क्रिया का चिन्ह कोष्ठ के बाईं ओर लगा है और जब दोनों राशि जुड़ जाय तब कोष्ठ का रखना कुछ अवश्य नहीं ऐसे ही अ - (क-ग) इसमें कोष्ठ के पहिले जो - चिन्ह आया है उसका अर्थ है कि क-ग संपूर्ण राशि को अ में से घटाना है और जब वह उस में से घट जाय तब कोष्ठ को मिटा दो ॥

॥ पहिले उदाहरण की रीति ॥

१६ प्रक्रम के अनुसार क-ग और अ इनका योग करना यही है कि उनको अपने २ चिन्ह सहित एक सीध में लिख दो जैसे अ + क-ग इसलिये जब योग के लिये कोष्ठ आवे वा उसके पहिले + चिन्ह हो तो कोष्ठ रखना कुछ अवश्य नहीं ॥

१९ प्रक्रम के अनुसार जब एक राशि को दूसरी राशि में

से घटाते हैं तो जिस राशि को घटाते हैं उसके सब पदों के चिन्ह बदल देते हैं अर्थात् + के स्थान में - लिखते हैं और - के स्थान + चिन्ह रखते हैं और फिर जोड़ने की रीति से योग करते हैं जैसे क-ग को अ में से घटाना होता है म क-ग के स्थान में - क+ग रखेंगे और इसे अ में जोड़ेंगे जैसे अ-क+ग यह १६ प्रक्रम के अनुसार योग हुआ इसलिये जब कोष्ठ के पहिले - चिन्ह हो तो कोष्ठ के भीतर जो चिन्ह हों उन्हें बदल दो अर्थात् + के स्थान में - चिन्ह लिखो और - के स्थान में + चिन्ह रखो तिस पीछे कोष्ठ को मिटा दो ॥

परंतु जब कोष्ठ के साथ गुणा, भाग, घात किया और मूल किया इनमें से कोई किया साथ लगी है तो जब तक वह किया पूरी न हो जाय तब तक कोष्ठ को दूर मत करो ॥ दूसरी रीति के उदाहरण अंकों में लिखते हैं ॥

जैसे  $८ - (६ - ३)$  इसका यह अर्थ है कि ६ में ३ को घटाकर शेष को ८ में से घटाना है तो  $६ - ३ = ३$   
 $८ - (६ - ३) = ८ - ३ = ५$  यह उत्तर हुआ ॥

कदाचित् कोष्ठ न करें और  $८ - ६ - ३$  ऐसे ही लिख दें तो इसका यह अर्थ है कि ८ में से ६ को बटाकर जो बाकी रहे उस में से ३ को घटाना है तो  $८ - ६ = २$   
 $८ - ६ - ३ = २ - ३ = - १$  यह उत्तर हुआ ॥

इसलिये जो कोष्ठ को मिटाना हो तो उसके भीतर की राशियों के चिन्ह पलट दो। जैसे  $८ - (६ - ३) = ८ - ६ + ३ = ५$  यही उत्तर पहिले आया था ॥

कोष्ठ से कभी दो अर्थ न निकलते हैं जैसे अ- (अ-क)

वा अ—अ—क इस कोष्ठ से एक तो यह अर्थ निकाल  
ता है कि अ—क सम्पूर्ण राशिका वर्ग करना है और इस  
रायह कि अक्षरसंज्ञावर्ग निकल आवे तो उस सम्पूर्ण वर्ग के  
पदों को अ में से घटाना है और जब दोनों किया हो  
जायं तब कोष्ठ को मिटा डालो ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) अ+(अ—क) इसका लघुतम रूप करो ॥  
अ+(अ—क) = अ+अ—क पहिली रीति से  
= २अ—क

(२) अ+क+(अ—क) इसका लघुतम रूप करो ॥  
अ+क+(अ—क) = अ+क+अ—क पहिली  
रीतिसे = २अ

(३) अ—(अ—क) इसका लघुतम रूप करो ॥  
अ—(अ—क) = अ—अ+क दूसरी रीति से  
= क

(४) अ+क—(अ—क) इसका लघुतम रूप करो ॥  
अ+क—(अ—क) = अ+क—अ+क दूसरी री  
तिके अनुसार = २क

(५) अग—अ—क. ग इसका लघुतम रूप करो ॥  
अग—अ—क. ग = अग—अग—कग  
= अग—अग+कग दूसरी रीति के अन्त  
सार = कग

(६)  $\frac{अ}{क} - \frac{अ-क}{क}$  इसका लघुतम रूप करो  
 $\frac{अ}{क} - \frac{अ-क}{क} = \frac{अ-अ+क}{क}$  दूसरे रीति से  
उत्सार

=  $\frac{अ-अ+क}{क}$  दूसरी रीतिके अनुसार

=  $\frac{क}{क}$

= १

(७)  $१ + \frac{अ+य}{अ-य}$  इसका लघुतम रूप करो ॥

$१ + \frac{अ+य}{अ-य} = \frac{अ-य}{अ-य} + \frac{अ+य}{अ-य}$

=  $\frac{अ-य+अ+य}{अ-य}$  प्रथमके अनुसार

=  $\frac{अ-य+अ+य}{अ-य}$  पहिली रीतिके अनुसार

=  $\frac{२अ}{अ-य}$

(८)  $१ - \frac{अ-य}{अ+य}$  इसका लघुतम रूप करो

$१ - \frac{अ-य}{अ+य} = \frac{अ+य}{अ+य} - \frac{अ-य}{अ+य}$

=  $\frac{अ+य-अ+य}{अ+य}$  प्रथमके अनुसार

=  $\frac{अ+य-अ+य}{अ+य}$  दूसरी रीतिके अनुसार

=  $\frac{२य}{अ+य}$

(९)  $अ - \frac{अ-क}{२}$  इसको २ से गुणा करो ॥

$२(अ - \frac{अ-क}{२}) = २अ - २ \times \frac{अ-क}{२}$  गुणा दो

यथा इसलिये को एको दूर किया

$$= २अ - \frac{अ-क}{१}$$

= २अ - अ + क दूसरी रीति के अनुसार

$$= अ + क$$

(१०)  $\frac{५}{२} - \frac{५-६}{५}$  को १० से गुणा करो ॥

$$\text{घात} = १० \times \frac{५}{२} - १० \times \frac{५-६}{५} \text{ २२ प्रकाम के अनुसार}$$

$$= \frac{५०}{२} - \frac{१०(५-६)}{५} \text{ ३८ प्रकामसे}$$

$$= ५५ - २(५-६)$$

$$= ५५ - (२५ - १२)$$

$$= ५५ - २५ + १२ \text{ दूसरी रीति से}$$

$$= ३५ + १२$$

(११)  $(अ + क)^२ - (अ - क)^२$  इसको लघुतम रूप करो ॥

$$(अ + क)^२ - (अ - क)^२ = (अ + २अक + क^२) - (अ^२ - २अक + क^२)$$

$$= अ^२ + २अक + क^२ - अ^२ + २अक - क^२$$

पहिली और दूसरी रीति के अनुसार

$$= ४अक$$

(१२)  $\frac{अ^२ - (क-ग)^२}{(अ+क)^२ - ग^२}$  इसको लघुतम रूप करो ॥

$$\text{अंश} = \frac{अ^२ - (क-ग)^२}{(अ+क)^२ - ग^२}$$

$$= \frac{(अ+क-ग)(अ-क+ग)}{(अ+क-ग)(अ+क+ग)}$$

$$\text{हर} = (अ+क+ग)(अ+क-ग)$$



$$= (\text{अ} + \text{क} + \text{ग}) (\text{अ} + \text{क} - \text{ग})$$

$$\frac{(\text{अ} + \text{क} - \text{ग})}{\text{मिन्} = (\text{अ} + \text{क} + \text{ग})} \quad \frac{(\text{अ} - \text{क} + \text{ग})}{(\text{अ} + \text{क} - \text{ग})} = \frac{(\text{अ} - \text{क} + \text{ग})}{\text{अ} + \text{क} + \text{ग}}$$

### ॥ उदाहरण ॥

(१) अकअ(ग-क) इसकालघुतम रूपकरो ॥

(२) ४(१+य)+३य इसकालघुतम रूपकरो ॥

(३) २(अ+य)-२(अ-य) इसका तथा ॥

(४) २(अ+क) (अ-क) तथा ॥

(५) ५(१-य)+(१+५य) × २ तथा ॥

$$(६) \frac{\text{अ}-\text{य}}{२} - \frac{\text{य}-२य}{२} \quad \text{तथा ॥}$$

$$(७) \frac{१}{२}(\text{अ} + \text{क}) - \frac{१}{२}(\text{अ} - \text{क}) \quad \text{तथा ॥}$$

$$(८) (\text{अ} + ७)य + (\text{क} - ७)य \quad \text{तथा ॥}$$

(९) २ - (-४ + ५य) इसकालघुतम रूपकरो ॥

$$(१०) १ - १ - १ - य \quad \text{तथा ॥}$$

$$(११) (२अ - क + ग) - (अ - क - २ग) \quad \text{॥}$$

$$(१२) \frac{१}{२}(\text{अ} - \text{य}) (२अ + \text{य}) + ३य(\text{अ} + \text{य})$$

$$(१३) (१ + \text{य}) (१ - \text{य}) (१ + \text{य}^२) \quad \text{॥}$$

$$(१४) २\left(\text{य} - \frac{१}{४}\right) \div (२य + १) + \frac{१}{२} \quad \text{॥}$$

$$(१५) \frac{१}{२} \left( \frac{अ}{क} + \frac{ग}{घ} \right) + \frac{१}{२} \left( \frac{अ}{क} - \frac{ग}{घ} \right) \quad ॥$$

$$(१६) \left\{ \frac{अ(अ+क)+क^३}{अ} \right\} \div \left\{ क(अ+क)-अ \right\} ॥$$

$$(१७) ४ \times \left\{ \frac{३}{८(१-घ)} + \frac{१}{८(१+घ)} \right\} ॥$$

$$(१८) \frac{२घ(२घ-अ)}{(अ-२अ)^२} + \frac{अ}{अ-२घ} \quad ॥$$

$$(१९) \frac{२}{३} (घ+२) \left\{ घ+२ - \frac{१}{३}(२घ+२) \right\}$$

$$(२०) \left\{ १-१-घ \right\} ग(२+घ) ॥$$

॥ एकवर्ण समीकरण ॥

४५ प्र० जो हम कहें कि  $२+३=५$  वा  $२ \times (१+६)$   
 $= १२$  तो इनकी समता में हम कुछ सन्देह नहीं हैं और  
 इसका ऐसी समता में हम कुछ प्रश्न नहीं कर सकते ॥ ऐसे ही

$$२घ + ३घ = ५घ \text{ वा } २(अ+घ) = २अ + २घ$$

इनकी समता में भी कुछ शंका नहीं है क्योंकि हम अच्छी  
 रीति से जानते हैं कि घ के स्थान में जहाँ सो मान रखो  
 परंतु  $२घ + ३घ$  अवश्य  $५घ$  को तुल्य होगा इसमें कु  
 छ सन्देह नहीं तो ऐसी समता को एक रूपता कहते हैं  
 और जो हम कहें कि  $घ+४=६$  वा  $२(१+घ)=७$  ॥

तो ऐसी समता में घ का एक नियत मान रखने से समता  
 बनी रहेगी और ऐसी समता को समीकरण कहते हैं और  
 ऐसे समीकरण में घ अव्यक्त राशि का मान जिस क्रिया  
 से निकलता है उसे पृथक्करण कहते हैं और जब अ  
 व्यक्त राशि के मान को उसके स्थान में रखकर समीकरण  
 की सत्यता दिखाते हैं तो उसको आलाप कहते हैं ॥

$५ + ४ = ९$  इस समीकरण में यका मान बताओ तो इस प्रश्न में हम देखते हैं कि यको ४ में जोड़ने से ९ होते हैं इस कारण अवश्य  $य = २$  ॥

$२(१ + ५) = १४$  इस समीकरण में यका मान बताओ तो इस प्रश्न में हम देखते हैं कि दोगुणा  $(१ + ५) = १४$  के तुल्य है इस कारण  $१ + ५$  अवश्य ७ के तुल्य होगा और केवल  $५$  के तुल्य होगा ॥

ऐसे प्रश्नों में अव्यक्त राशि का मान निकालना बहुत कठिन नहीं है परंतु बहुत बड़े प्रश्न ऐसे होते हैं कि उनमें अव्यक्त राशि बहुत दूरी रहती है ऐसे प्रश्नों में अव्यक्त राशि का मान निकालने में बीज गणित का बड़ा प्रयोजन पड़ता है इसको अर्थ हम रीतें लिखते हैं और उन सब रीतों की सत्यता इस खण्ड सिद्ध परिभाषा से पार्ई जाती है ॥

कि जो तुल्य राशियों पर सभानक्रिया की जाय तो उनके फल भी तुल्य होंगे ॥

(४६) प्र० जो = इस चिन्ह के दोनों ओर एक ही राशि दो और उसका चिन्ह भी एक सा हो। जैसे  $+ ३ - ५$  तो ऐसी राशि जो दोनों ओर से निकाल लो और इस क्रिया को शोधन कहते हैं और हम जानते हैं कि जो तुल्य राशियों में से तुल्य राशि निकाली जाय तो शेष अवश्य तुल्य बनेगे जैसे जो  $५ + ४ = ९ + ४$  तो = इस चिन्ह के दोनों ओर  $+ ४$  है उसे निकाल लो तो  $५ ७$  के तुल्य रह गया ॥

### ॥ रीति ॥

४७ प्र० सभानक्रिया में वैसे एक पक्ष के किसी पद को दूसरे पक्ष में स्थान करे तो उसके चिन्ह को बदल दो बाजो उसका चिन्ह - हो तो उसको स्थान में - रखो और जो

- हो तो धन लिखो इस क्रिया को पश्चात्तरक्षण कते हैं जैसे अय + क = गय - घ, यह एक समीकरण है इस के दोनों पक्षों की तुल्य राशियों में से गय को घटाया तो शेष भी तुल्य बचेंगे ॥ अर्थात्

$$\text{अय} - \text{गय} + \text{क} = \text{गय} - \text{गय} + \text{घ}$$

$$\therefore \text{अय} - \text{गय} + \text{क} = \text{घ} \therefore \text{गय} - \text{गय} = 0$$

इस रीति से = चिन्ह के एक ओर से गय को उसका चिन्ह पलट कर दूसरी ओर स्थापन कर दिया ॥

फेर हर एक पक्ष में से क को घटाया तो

$$\text{अय} - \text{गय} + \text{क} - \text{क} = \text{घ} - \text{क}$$

$$\text{वा अय} - \text{गय} = \text{घ} - \text{क} \therefore \text{क} - \text{क} = 0$$

अर्थात् क पद को एक पक्ष में से दूसरे पक्ष में उसका चिन्ह पलट कर रख दिया ॥

### ॥ जवाहरण ॥

य + २ = ६ - य इस समीकरण के एक पक्ष में अज्ञान लिखो और दूसरे पक्ष में अंक, तो - य के स्थान में + य लिखा और + २ के स्थान में - २ लिखा ॥

$$\therefore \text{य} + \text{य} = ६ - २$$

(२) ४ य - ६ = २ य - २ य + १२, इस समीकरण के एक पक्ष में अक्षर रखो और दूसरे पक्ष में अङ्क ॥

$$४ य - २ य + २ य = १२ + ६$$

### ॥ तीसरी रीति ॥

४८ प्र० जो एक समीकरण के प्रत्येक पद को एक ही राशि से गुणा करो तो भी समीकरण समतान ही रहेगी

क्योंकि जब हम प्रत्येक पद को एक ही राशि से गुणा करते हैं तो हर एक पदकी सम्पूर्ण राशि का उस राशि से बराबर गुणा हो जाता है और इसलिये घात भी तुल्य होते हैं ॥

इस रीति से समीकरण में जो भिन्न होते हैं उनके छेद दूर हो जाते हैं और इस क्रिया को छेद गमक कहते हैं ॥

जैसे  $3-5 = \frac{4y}{3}$  इस समीकरण के प्रत्येक पद को ३ से गुणा तो  $9y - 15 = 4y$  क्योंकि  $3 \times \frac{4y}{3} = 4y$  ॥

$\frac{y}{2} + 4 = \frac{y}{2} + 6$  इस समीकरण में जो पद भिन्न हैं उनके छेदों को दूर करे, समीकरण के प्रत्येक पद को २ से गुणा तो

$y + 8 = y + 12$  इस समीकरण में अब एक भिन्न पद रह गया इसलिये उस के प्रत्येक पदको भिन्न पद के हर ३ से गुणा तो  $3y + 24 = 2y + 36$  इस समीकरण में अब कोई पद भिन्न नहीं रहा ॥

ऐसे ही जो दो से अधिक भिन्न पद हों तो उनके छेद क्रम से दूर हो सकते हैं ॥

परन्तु जो भिन्नोके हर बड़े नहों तो उन सबके घात से समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा करो ॥

जैसे  $\frac{y}{2} + 4 = \frac{y}{3} + 6$  यह जो समीकरण लिखा है इस के प्रत्येक पदको ३ वा ६ से एक बार ही गुणा किया तो

$3y + 12 = 2y + 18$  क्योंकि  $6 \times \frac{y}{2} = 3y$  और

$6 \times 4 = 24$  ऐसे ही जो  $\frac{y}{2} - \frac{2y}{3} + \frac{y}{4} = 6$

समीकरण है उसके प्रत्येक पदको  $2 \times 3 \times 4$  वा २४ से गुणा तो  $12y - 16y + 6y = 144$  क्योंकि  $24 \times \frac{y}{2} = 12y$  ॥

$$३० \times \frac{३५}{३} = ३०५ \text{ औ } ३० \times \frac{५}{३} = ५० ॥$$

परंतु जो प्रत्येक भिन्न पदों के दूरो के घात से गुणा करने के स्थान में उनके लघु समावर्त्य अर्थात् उस छोटी संख्या से जिसमें प्रत्येक दूर का निःशेष भाग लग जाय गुणा किया जाय तो वह ज पड़ेगा ॥

$$\text{जैसे } \frac{५}{२} - \frac{५}{४} + \frac{५}{६} = ३ \text{ इसमें दूरों का घात } १४ \text{ है ॥}$$

परंतु उनका लघु समावर्त्य = ८ है इसलिये छेद गमके लिये समीकरण के प्रत्येक पद को ८ से गुणा ॥ तो

$$\therefore ८ \times \frac{५}{२} = ४५, ८ \times \frac{५}{४} = २५, ८ \times \frac{५}{६} = ५ ॥$$

$$\therefore ४५ - २५ + ५ = २५ \text{ इस समीकरण में अग्रदूर दूर होगये ॥}$$

॥चौथी रीति ॥

४६ ३० जो समीकरण के प्रत्येक प्रत्येक पद में किसी राशिका भाग दिया जाय तो वही समीकरण की समता बनी रहेगी ॥

क्योंकि जब हम समीकरण के दोनों पक्षों की तुल्य संपूर्ण राशियों के प्रत्येक पद में एक राशिका भाग देते हैं तो उन संपूर्ण राशियों में उस राशिका भाग लग जाता है और इस कारण लब्धितुल्य होती है ॥

$$\text{जैसे } ४५ - २५ = २० \text{ इस समीकरण के प्रत्येक पद में } २ \text{ का भाग दिया तो } २५ - ५ = ८$$

$$\text{ऐसे ही जो } ७५ = २८ \text{ इस समीकरण के प्रत्येक पद में } ७ \text{ का भाग दिया तो } \frac{७५}{७} = \frac{२८}{७} \text{ वा } ५ = ४ ॥$$

$$\text{अथ = क इस समीकरण के प्रत्येक पद में } \frac{५}{३} \text{ का भाग दिया तो } \frac{५५}{३} = \frac{५५}{३} \text{ वा } ५ = ५ ॥$$

जब एक वर्षी समीकरण में अव्यक्त राशिका एक घात हो जैसे य, और बड़ा घात न हो जैसे य, य आदितो ऊपर जो ४ रीति लिखी है उन से एक घात

एक वर्ण समीकरण में अव्यक्त राशिका मान निकल आता है

॥ ५० प्र० एक बात एक वर्ण समीकरण में ॥

अव्यक्त राशिके जाने की  
रीति

(१) जो समीकरण में भिन्न पद हों और उनमें अव्यक्त राशि मिली हों तो उनके छेदों को तीसरी रीति से दूर करना ॥

(२) जो समीकरण में कोई राशिकोष्ट वा शृंखल से घिरी हो तो कोष्टको ४४ प्रक्रम के अनुसार मिटा देना ॥

(३) दूसरी रीति से समीकरण के जिन पदों में अव्यक्त राशि मिली हों उनको = चिन्ह के एक और ले आओ और जिन पदों में अव्यक्त राशि न हो उनको = दूसरे चिन्ह के दूसरी ओर रखो ॥

(४) जो सजातीय राशि हों तो उनका योग वा अन्तर जोड़ने वा घटाने की रीति से कर लो ऐसी क्रिया करने से अव्यक्त राशिका केवल एक पद रह जायगा ॥

(५) उसके गुणका समीकरण के प्रत्येक पद में भाग देने से अव्यक्त राशिका मान निकल आयेगा ॥

और जो समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही राशि हों और उनके चिन्ह भी एक से हों तो उनको पहिली रीति के अनुसार मिटा दो वा जो समीकरण के प्रत्येक पद में किसी एक राशिका निरशेष भाग लग जाय तो भाग देके लब्धि ले लो ॥

॥ उत्तरहरण ॥

(१)  $२य - ३ = \frac{य}{२} + ६$  इस समीकरण में य का मान बताओ ॥

$\frac{य}{२}$  यह भिन्न है इसलिये समीकरण में कोई भिन्न रूप पद न रखने के लिये प्रत्येक पद को २ से गुणा ॥ तो

$$४य - ६ = य + १२ \therefore २ \times \frac{य}{२} = य$$

पक्षान्तरानयन से

$$४य - य = १२ + ६$$

योग करने से

$$३य = १८$$

३ का भाग देने से

$य = \frac{१८}{३} = ६$  यही य शब्द का मान है इसकी सत्यता दिखाने के लिये इस समीकरण में य के स्थान में ६ रक्खा ॥ तो

$$२ \times ६ - ३ = \frac{६}{२} + ६ \text{ वा } १२ - ३ = ३ + ६ \text{ वा } ९ = ९$$

इससे जाना जाता है कि जो य ६ के तुल्य हो तो समीकरण भी शुद्ध है ॥

(२)  $\frac{य}{२} - ५ = \frac{य}{३} - ३$  तो य का मान बताओ ॥

$\frac{य}{२}$  और  $\frac{य}{३}$  ये दो भिन्न हैं इसलिये समीकरण में भिन्न रूप पद न रखने के लिये तीसरी शक्ति से  $२ \times ३$  वा ६ से समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा तो

$$३य - ३० = २य - १८ \therefore ६ \frac{य}{२} = ३य \text{ और } ६ \times \frac{य}{३} = २य$$

पक्षान्तरानयन से  $३य = ३० - १८$



भाग करने से  $y = १२ \div ३y - २y = १y$  वा  $y$

$y$  का १२ मान युक्त है क्योंकि  $\frac{१२}{३} - ५ = ४ - ५ = १$

और  $\frac{१२}{३} - ३ = ४ - ३ = १$  ॥

(३)  $\frac{y-६}{२} + ६ = \frac{५y-६}{२}$ , तो  $y$  का मान बताओ

२ से गुणा किया तो  $y-६+१२=५y-६$

— ६ मिटा दिया तो  $y+१२=५y$

पक्षान्तरानयन से

$$१२ = ५y - y$$

योग करने से

$$१२ = ४y$$

४ का भाग देने से

$$३ = y \text{ वा } y = ३$$

(४)  $\frac{y}{३} - \frac{५y}{३} - \frac{४}{३} = \frac{४y}{३} - ३$  तो  $y$  का मान बताओ ॥

$\times ३$  वा ६ से गुणा किया तो  $३y - १०y - ४ = ४y - ९$

पक्षान्तरानयन से  $३y - १०y - ४y = ४ - ९$

योग करने से

$$- १५y = - १०$$

— १५ का भाग देने से

$$y = \frac{-१०}{-१५} = \frac{२}{३}$$

(५)  $\frac{y}{३} - \frac{y}{२} + \frac{y}{५} = \frac{२}{३}$  तो  $y$  का मान निकालो

$३ \times ३ \times ५$  वा ३० से गुणा किया तो  $३० \times \frac{y}{३} = २०y$

$३० \times \frac{y}{२} = १५y$ ,  $३० \times \frac{y}{५} = ६y$  और  $३० \times \frac{२}{३} = २०$

$$\therefore २०y - १५y + ६y = २०$$

योग करने से

$$y = १५$$

(६)  $\frac{४य}{३} - \frac{२य}{१०} + \frac{५}{६} = ३६$  तो यका मान बताओ

३, १० और ६ इनकालघुतम समावर्त्य ३० हें ॥

इसलिये हरों के दूर करनेके लिये समीकरण के प्रत्येक पदको ३० से गुणा ॥ तो

$$\therefore ३० \times \frac{४य}{३} = १० \times ४य = ४०य$$

$$३० \times \left( -\frac{२य}{१०} \right) = -६य, ३० \times \frac{५}{६} = ५य \text{ और } ३० \times ३६ = ११७०$$

$$\therefore ४०य - ६य + ५य = ११७०$$

योग करने से  $३६य = ११७०$

३६का भाग देनेसे  $य = \frac{११७०}{३६} = ३०$

॥ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उनमें यका मान बताओ

(१)  $६य - १० = ५य - ४$  ॥

(२)  $१३य + १ = ८य + ५$  ॥

(३)  $३य + ३० = २ + ३६$  ॥

(४)  $४य - २य = २४ - ५$  ॥

(५)  $७य - ११ + ५ = ८य - ६$  ॥

(६)  $१५ - २य + ६ = ३य + १$  ॥

(७)  $१य - ६ = १२ - ४य - ४$  ॥

(८)  $१२ - ५य = १५ - ३य - ८$  ॥

(९)  $१२१ = १४य + १ - ३य + १०$  ॥

(१०)  $५०० = ३०य + १२ + ३२य - ८$  ॥

(११)  $७य - २य + ५ = १३य - ४य - १५$  ॥

(१२)  $१२य - ६य + ४य = ३य + ७४$  ॥

(१३)  $२य + \frac{१}{२} = ३य - \frac{१}{२} ॥$

(१४)  $२५य - ३\frac{१}{२} = ३\frac{१}{२} + य ॥$

(१५)  $य + \frac{य}{२} = ६ ॥$

(१६)  $२य - \frac{य}{२} = १८ ॥$

(१७)  $३य + \frac{य}{३} = ४य - ६ ॥$

(१८)  $\frac{४य}{३} + \frac{१}{३} = य + ३ ॥$

(१९)  $\frac{३य}{५} - \frac{य}{५} = य - ६ ॥$

(२०)  $\frac{य}{३} + \frac{य}{६} = १५ ॥$

(२१)  $\frac{य}{५} - \frac{य}{१०} = \frac{१०}{५} ॥$

(२२)  $य - \frac{य}{२} + \frac{य}{३} - \frac{१}{३} = ३\frac{१}{२} ॥$

(२३)  $\frac{२य}{६} + \frac{य}{६} - \frac{१}{६} = य - ४ ॥$

(२४)  $\frac{३य}{७} - २ = \frac{य}{५} + \frac{३०}{५} ॥$

(२५)  $\frac{य}{३} - \frac{य}{३} - \frac{य}{४} + \frac{१६}{३} = \frac{३}{४} ॥$

(२६)  $\frac{३य}{२} - \frac{२य}{३} + \frac{१}{३} = \frac{य}{६} + ५\frac{५}{६} ॥$

(२७)  $\frac{य}{५} + \frac{य}{४} + \frac{य}{३} - \frac{य}{२} = ७ ॥$

(२८)  $य - य - \frac{य}{३} - \frac{य}{७} = \frac{य}{२} + ६ ॥$

(२९)  $\frac{३य}{१४} - \frac{२य}{२२} + \frac{१}{३} = \frac{य}{४} - २\frac{१}{४} ॥$

$$(३०) \frac{३य}{७} - \frac{य}{४} - \frac{य}{६} = \frac{५}{२२} - \frac{३}{२२} ॥$$

$$(३१) २य - \frac{२य}{५} - \frac{२य}{५} - \frac{४य}{२२} = \frac{८य}{७} - \frac{१६}{२२} ॥$$

$$(३२) \frac{य}{८} + \frac{२य}{५} = \frac{७य}{२५} - \frac{य}{६०} + \frac{३}{२०} ॥$$

$$(३३) \frac{७य}{८} - \frac{३य}{७} + \frac{१}{८} = \frac{६य}{४} + \frac{६य}{१४} - \frac{२०}{२२} ॥$$

$$(३४) \frac{३य}{१६} + \frac{७य}{२५} - \frac{७य}{२०} = २\frac{६५}{६०} - \frac{३}{१६} ॥$$

$$(३५) \frac{१४य}{३} - \frac{८य}{५} = १०\frac{३}{३} + \frac{१य}{३} - ३\frac{६}{५} ॥$$

$$(३६) \frac{य}{४} - ४\frac{९}{२} + \frac{य}{५\frac{९}{२}} + \frac{य}{२} = \frac{१६\frac{९}{२}}{५\frac{९}{२}} ॥$$

५१ प्र० जो समीकरण में कोष्ठ वा श्रृंखला आवें तो वे  
४४ प्रक्रम की रीतियों से हल हो सकते हैं ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) २(य + ५) + ३(२य - ७) = २९ तो य का मान बताओ ॥

पहिले कोष्ठ का यह अर्थ है कि य + ५, २ गुणा है और दूसरे कोष्ठ से मालूम होता है कि ३ गुणा २य - ७ को जोड़ना है इसलिये गुणा करने के पीछे कोष्ठों को मिटा दिया ॥ तो

$$\therefore २(य + ५) = २य + १० \text{ और } ३(२य - ७) = ६य - २१ ॥$$

$$\therefore २य + १० + ६य - २१ = २९ ॥$$

पश्चात्तरानयन से  $२य + ६य = २२ + २१ - १०$

योग करने से  $८य = ३२$

८ का भाग देने से  $य = \frac{३२}{८} = ४$  ॥

(२)  $२(य+५) - ३(२य-७) = १५$  तो य का मान निकालो

$\therefore २(य+५) = २य+१०$  और  $३(२य-७) = ६य-२१$  ॥

$\therefore २य+१० - (६य-२१) = १५$

वा ४४ प्रक्रम से  $२य+१० - ६य+२१ = १५$  ॥

पश्चात्तरानयन से  $२य - ६य = १५ - १० - २१$

योग करने से  $-४य = -१६$  ॥

-४ का भाग देने से  $य = \frac{-१६}{-४} = ४$

(३)  $५ - \frac{य+४}{११} = य - ३य$  का मान कहो ॥

यह तो हम लिख ही चुके हैं कि जो रेखा भिन्न के अंश और हर के बीच में खिंची रहती है वह दोनों अंश और हर का अंखल होती है समीकरण के प्रत्येक पद को ११ से गुणा करो ॥

$५५ - (य+४) = ११य - (३३ तो ४४ प्रक्रम से$

वा  $५५ - य - ४ = ११य - ३३$

पश्चात्तरानयन से  $५५ - ४ + ३३ = ११य + य$

योग करने से  $८३ = १२य$

१२ का भाग देने से  $य = \frac{८३}{१२} = ७$

(४)  $य + \frac{३य-५}{२} = १२ - \frac{२य-४}{३}$  तो य का मान क-

लओ ॥

हैद गम के लिये प्रत्येक पद को  $२ \times ३$  वाद से गुणा किया। तो

$६य + ३(३य - ५) = ७२ - २(२य - ४)$

वा  $६य + (६य - १५) = ७२ - (४य - ८)$

४ प्रक्रम से  $६य + ६य - १५ = ७२ - ४य + ८$

क्षेत्र रानयन से  $६य + ६य + ४य = ७२ + ८ + १५$

योग करने से  $१६य = ९५$

६ का भाग देने से  $य = \frac{९५}{१६} = ५ \parallel$

(५)  $\frac{८ - ७य}{८} + \frac{१२ + ६य}{१६} = \frac{१ - ३य}{१०} - \frac{२६ + ८य}{२०}$  तो

य का मान बताओ, हरे का लघुतम समापत्य ८० है

इसलिये प्रत्येक पद को ८० से गुणा किया तो

$१०(८ - ७य) + ५(१२ + ६य) = ८(१ - ३य) - ४$

$(२६ + ६य) वा (८० - ७०य) + ६० + ४५य = ८ -$

$२४य - १९६ - ३२य$

पक्षांतरानयन से  $२४य + ३२य - ७०य + ४५य = ८ - १९६ - ६० - ८५$

योग करने से  $३१य = -२४८$

३१ का भाग देने से  $य = \frac{-२४८}{३१} = -८$

(६)  $\frac{१}{१४} (३य + \frac{२}{३}) - \frac{१}{७} (४य - ६\frac{२}{३}) = \frac{१}{२} (५य - ६)$

तो य का मान बताओ, १४ से गुणा करने से  $३य + \frac{२}{३} - २$

$(४य - ६\frac{२}{३}) = ७(५य - ६) वा ३य + \frac{२}{३} -$

$(८य - १२\frac{२}{३}) = ३५य - ४२ \parallel$

$\therefore ३य + \frac{२}{३} - ८य + १२\frac{२}{३} = ३५य - ४२$

पक्षांतरानयन से  $४२ + \frac{२}{३} + १२ + \frac{४}{३} = ३५य + ८य - ३य$

योग करने से  $५६ = ४०य$

$\therefore ४० का भाग देने से य = \frac{५६}{४०} = १\frac{१}{५}$

॥ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

नीचे जो सभी करण लिखे हैं उनमें य का मान बताओ

$$(१) ६य + २(११ - य) = ३(१६ - य) ॥$$

$$(२) ३(य + ९) + २(य + २) = ३२ ॥$$

$$(३) ३य - २(५य + ४) = २(४य - ६) ॥$$

$$(४) ५(२य - २) - ३(२य + ९) = २७ ॥$$

$$(५) ६(३ - २य) = २४ - ४(४य - ५) ॥$$

$$(६) ४५ - ४(य - २) = ५(य + २) ॥$$

$$(७) ७य = ८ - \frac{१ - ६य}{२} ॥$$

$$(८) \frac{२य}{७} + ४ = य - \frac{य - ९}{६} ॥$$

$$(९) \frac{३य + ९}{२} - \frac{य - ९}{६} = \frac{३य}{३} + ९ ॥$$

$$(१०) \frac{१}{४}(य + ६) - \frac{१}{२}(१६ - ३य) = ४ \frac{१}{६}$$

$$(११) \frac{१}{६}(३य + ३) + \frac{१}{१५}(७य - ४) - \frac{१}{२०}(७य + ७) = २$$

$$(१२) १०(य + \frac{१}{३}) - ६य(\frac{१}{६} - \frac{१}{३}) = २३ ॥$$

(प्रश्न० बहुधा समीकरण में भिन्न पदों के हर में अ व्यक्त राशि रहती है परन्तु उसका मान पूर्वरीतियों से मिल जाता है प्रश्न जो हर जिनमें अव्यक्त राशि हों वे केवल एक पदके हों ॥ जैसे

॥ उदाहरण ॥

$$(१) \frac{६}{२य} - ४ = ५ \text{ तो य का मान बताओ ॥}$$

$$\text{पक्षांतरानयनसे } \frac{६}{२य} = ५ + ४$$

योग करने से  $\frac{5}{x} = 2$

य से गुणा किया तो  $5 = 2x$

5 का भाग देने से  $x = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

1)  $\frac{2}{y} + \frac{8}{y} = \frac{3}{y} + \frac{4}{y} - \frac{3}{y}$  तो y का मान बताओ

क्योंकि चारों भिन्नो में y समच्छेद है ॥

योग करने से  $\frac{10}{y} = \frac{4}{y} - \frac{3}{y}$

सांतरानयन से  $\frac{10}{y} - \frac{4}{y} = \frac{1}{y}$

योग करने से  $\frac{6}{y} = \frac{1}{y}$

$\therefore y = 6$

दूसरे समीकरण के जिन पदों के हर में अमक्त शि हों वे दो वा अधिक वा पद के हों तो प्रथम जो एक पद के हर हों उन्हें दूर करो फिर शोधन पदांतरानय और योग करने से समीकरण में छोड़े पद रह जाय वक्रम से बहुपदों के हरों को दूर करो और जो एक पद के हर न हों तो बहुपद के हरों को एक एक कर दूर करो ॥

॥उदाहरण॥

$\frac{2x+13}{2x} - \frac{3x+4}{5x-2x} = \frac{3x}{x}$  तो x का मान बताओ

प्रथम एक पद के हरों को दूर करने के लिये

1) से गुणा किया ॥

$\frac{2x+13}{2x} \times \frac{5x-2x}{5x-2x} - \frac{3x+4}{5x-2x} \times \frac{5x-2x}{5x-2x} = \frac{3x}{x} \times \frac{5x-2x}{5x-2x} = 3x$



अंश और दूर दोनों में ५ का भाग देने से  $१३ = \frac{३(३५+५)}{५-५}$

५-५ से गुणा करने से  $१३५ - ६५ = ८५ + १५$

पक्षांतरानयन से  $१३५ - ६५ = ६५ + १५$

योग करने से  $४५ = ८०$

४ का भाग देने से  $५ = \frac{८०}{४} = २०$

(२)  $\frac{१०५+३७}{१८} - \frac{१२५+२}{१५-८} = \frac{५५-४}{६}$  तो यका मा  
न नताओ ॥

१८ और ८ हरों को दूर करने के लिए १८ से गुणा किया तो

$$१०५ + ३७ - \frac{२१६५ + ३६}{१२५ - ८} = १०५ - ८$$

शोधन और पक्षांतरानयन से  $७ + ८ = \frac{२१६५ + ३६}{१२५ - ८}$

योग करने से  $२५ = \frac{२१६५ + ३६}{१२५ - ८}$

१२५-८ से गुणा किया  $२५(१२५-८) = २१६५ + ३६$

$$\text{वा } २७५५ - २०० = २१६५ + ३६$$

पक्षांतरानयन से  $२७५५ - २१६५ = २०० + ३६$

योग करने से  $५९५ = २३६$

५९ का भाग देने से  $५ = \frac{२३६}{५९} = ४$

(३)  $\frac{१}{५-२} - \frac{३}{५+७} = \frac{३(५-२)}{५+७}$  इसमें यका मानव  
ताओ ॥

३(५-२) से गुणा करने से  $३ - \frac{१४(५-२)}{५+७} = १$  ∴

$$३(५-२) \times \frac{१}{५-२} = ७$$

पक्षांतरानयन से और योग करने से  $६ = \frac{१४(५-२)}{५+७}$

५+७ से गुणा किया तो  $६५ + ४२ = १४५ - १४$

- पक्षांतरानयन से  $१४५ - ६५ = ७२ + १४$

1। ग करने से  $x = 56$

2। का भाग देने से  $y = \frac{56}{2} = 28$

(8)  $\frac{2(2-4y)}{2-y} + \frac{3}{2-y} = 7$  यका मान बताओ

2-y से गुणा किया तो  $2(2-4y) + \frac{6-3y}{2-y} = 28-2y$

वा  $4-8y + \frac{6-3y}{2-y} = 28-2y$

शोधन और पक्षांतरानयन से  $\frac{6-3y}{2-y} = 28-4 = 24$

2-y से गुणा किया तो  $6-3y = 24-4y$

पक्षांतरानयन से  $4y-3y = 24-6$

योग करने से  $y = 18$

18 का भाग देने से  $x = \frac{56}{2} = 28$  ॥

(9)  $\frac{15+3y}{y+2} + \frac{30+8y}{y+3} = 7 + \frac{28}{y+2}$  इसमें

y का मान बताओ ॥

y+2 से गुणा किया तो  $15+3y + \frac{30y+8y^2+30+8y}{y+3} = 7y+14 + \frac{28y+56}{y+2}$

$= 7y + 14 + 28$

पक्षांतरानयन और योग करने से  $\frac{30y+8y^2+30+8y}{y+3} = 8y+42$

$30y+8y^2+30+8y = 8y^2+24y+126$

$+12y+42$

शोधन और पक्षांतरानयन से  $30y-12y-126 = 8y^2-8y^2-24y+12y+42-42 = 18y-126$

$18y-126$

योग करने से  $6y = 126$

6 का भाग देने से  $y = \frac{126}{6} = 21$

॥ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उनमें प का मान निकालो ॥

(१)  $\frac{2}{3}p + \frac{1}{4}p = 12$  ॥

(२)  $\frac{8}{9}p + \frac{5}{8}p = 81$  ॥

(३)  $\frac{3}{k} + \frac{2}{3k} = 3 + \frac{2}{k}$  ॥

(४)  $\frac{8p-8}{22} + \frac{p-2}{4p-6} = \frac{2p}{9}$  ॥

(५)  $\frac{5p-12}{22} = \frac{12-8p}{8-4p} + \frac{p-8}{8}$  ॥

(६)  $\frac{7p+12}{22} - \frac{p+5}{8p-11} = \frac{3}{2}$  ॥

(७)  $\frac{p-9}{p+9} + \frac{2}{2(p+9)} = \frac{2p-12}{2p-6}$  ॥

(८)  $\frac{3}{p} - \frac{2}{p+1} = \frac{5}{8(p+1)}$  ॥

(९)  $\frac{8p+16}{22} - \frac{10}{3p-10} = \frac{2}{2-2p}$  ॥

(१०)  $\frac{8p+5}{2p+1} - \frac{1p+36}{p+12} - 2 = 0$  ॥

प० स० समीकरण में जो बड़े अंक दस हों तो उन को हटाने से लिखें कि मूल अंक जिनके एक से चिन्ह हों वे एक दूसरे को नीचे रखें ॥

॥ उदाहरण ॥

(१)  $100p - 82p + 82 + 250 = 600 - 34p$   
 $= 28p + 500 + 48p$

पक्षांतरानयनसे	७०५	- ४२५	= ७००	- ५६
	३५५	- ५६५	६०	- ४२
	६०५			- ५६०

योग करनेसे  $\left. \begin{array}{l} १६५ \\ - ६६ \end{array} \right\} \begin{array}{l} ५ = ७६० \\ - २७६ \end{array}$

$६०५ = ४०२$

$\therefore ५ = \frac{४०२}{६७} = ६$

(२)  $\frac{६५ - १३}{४} \quad \frac{२४६ - ६५}{१४} = \frac{७५ + ६}{६}$

१५ + १ इसमें ५ का मान बताओ ॥

७  
हरों का ५६ लघुतम समापवत्यहै इस कारण ५६ से गुणा कियाती

$\frac{१२६५ - १८२ - ६६६ - ३६५}{२४५ + ८} = \frac{४६५ + ६३ - ३६५}{२४५ + ८}$

या  $\frac{१२६५ - १८२ - ६६६ + ३६५}{२४५ - ८} = \frac{४६५ + ६३ - ३६५}{२४५ - ८}$

पक्षांतरानयनसे	१२६		६३
	३६	५ - ४६५ = १८२	
	२४		६६६

योग करनेसे  $\left. \begin{array}{l} १८६ \\ - ४६ \end{array} \right\} \begin{array}{l} ५ = १२४६ \\ - ८ \end{array}$

$१२४६ = १२३३$

$\therefore ५ = \frac{१२३३}{२४७} = ५$

(३)  $202(y-2) + 24(3y+2) + 22(4y+2) = 24$   
 $(2y+20) + 22(y+22) - 34$  इसमें यका मान बताओ ॥  
 उत्तर  $y = 2 \frac{1}{2}$  ॥

### ॥ प्रश्न ॥

जिनका उत्तर एक घात एक वर्ण समीकरण के पृथक्कर  
 णा से निकल आता है ॥

५४ प्र- ५३ प्रकम जो हम लिख चुके हैं उनके जानने से  
 बहुत तेरे प्रश्न जिनके उत्तर अंक गणित से नहीं निकल स  
 के हैं सत्रज में हो जाते हैं और अङ्क गणित में जैसी री  
 ति लिखी होती है कि उनके अनुसार क्रिया करने से प्र  
 श्न का उत्तर निकल आता है वैसे रीति बीज गणित में नहीं  
 लिखते और केवल अभ्यास ही से विद्यार्थी प्रश्न को सही क  
 रण के प्रकार में लिख सकता है परन्तु प्रश्न को अच्छी रीति से  
 समझ के इतना अवश्य देख लेना चाहिये कि प्रश्न में कौन  
 सी राशि अज्ञात वा दृश्य हैं और कौन सी अज्ञात वा दृष्ट हैं  
 फिर अज्ञात राशि के स्थान में य लिख कर अज्ञात राशि यों  
 को धरो और प्रश्न से एक ऐसा समीकरण बना लो जिस  
 में प्रश्न की सब बातें पाई जाय ॥

### ॥ प्रश्न ॥

(१) ३ लड़कों की अवस्था मिल कर २४ वर्ष की है औ  
 र उनके जन्म दिन में दो दो वर्ष का अंतर है तो बताओ  
 कि हर एक लड़के की अवस्था क्या होगी ॥

अब इस प्रश्न में देखो कि अज्ञात राशि कौन सी है और  
 अज्ञात कौन सी ॥

॥ व्यक्त राशि ॥

- (१) तीनों लड़कों की अवस्था का योग २४ वर्ष है ॥  
 (२) और प्रत्येक दो लड़कों की अवस्था में २ वर्ष का अंतर है

॥ अव्यक्त राशि ॥

- (१) बड़े लड़के की अवस्था बताओ ॥  
 (२) मझले लड़के की अवस्था बताओ ॥  
 (३) छोटे लड़के की अवस्था बताओ ॥

परन्तु सच पूछो तो केवल एक ही राशि अज्ञात है क्यों कि जो एक लड़के की अवस्था मालूम होजाय तो शेष दो लड़कों की अवस्था भी मालूम होजायगी इस कारण कल्पना करो कि छोटे लड़के की अवस्था य है ॥

तो  $y + २$  मझले लड़के की अवस्था होगी ॥

और  $y + ४$  बड़े लड़के की अवस्था होगी ॥

अब वही एक बात का तो बीजात्मक रूप कर लिया अब दूसरी बात रद्द गूँ है वह यह है कि तीनों लड़कों की अवस्था का योग २४ वर्ष है वा  $y, y + २$  और  $y + ४$  अर्थात्  $३y + ६$ , २४ वर्ष के तुल्य है इसका समीकरण बनाया तो  $३y + ६ = २४$  इसमें  $y$  का मान बताओ ॥

पसाह्नानयन से  $३y = २४ - ६ = १८$

$३$  का भाग देने से  $y = \frac{१८}{३} = ६$

∴ छोटे लड़के की अवस्था ६ वर्ष की है ॥

मझले लड़के की अवस्था ८ वर्ष की है ॥

और बड़े लड़के की अवस्था १० वर्ष की है ॥

- (२) भरे पास जितनी सुहर हैं उनसे पाँच गुने रूपये हैं

और सर्वधन १४७ है तो बतलाओ मेरे पास कितनी मुहर हैं और कितने रुपये ॥

कल्पना करो कि य मुहर हैं  
तो ५ य रुपये होंगे ॥

और मेरे पास १६ की एक २ मुहर है तो य गुणा १६ वा १६ य रुपये मुहरों के हुए ॥

∴ १६ य + ५ य = सर्वधन परंतु सर्वधन = १४७

∴ २१ य = १४७

२१ का भाग देने से य =  $\frac{१४७}{२१} = ७$  मुहर

और ५ य =  $५ \times ७ = ३५$  रुपये

(३) में १४ कोड़ी और ७ रुपये की कुंडी साहू कारे में पचाने को गया और मैंने गुमास्ते के हाथ में कुंडी देकर उस्से कहा कि तुम मुझे इस कुंडी के काम में मुहर रुपये अठ्ठनीचौअनी दो अनी और एक अनी वराबर दो तो वह सुनते ही चुपका हो रहा तो बतलाओ कि उसको कितनी मुहर आदि देनी चाहिये ॥

कल्पना करो कि य दूष्ट संख्या है ॥

तो य मुहरों के य गुणा १६ वा १६ रुपये होंगे ॥

य रुपये के य रुपये होंगे

य अठनीयों के  $\frac{५}{२}$  रुपये होंगे

य चौअनियों के  $\frac{५}{४}$  रुपये होंगे

य दोअनियों के  $\frac{५}{८}$  रुपये होंगे

य एकअनियों के  $\frac{५}{१६}$  रुपये होंगे

औ १४ कोड़ी ७ रुपयों के २८० रुपयें होंगे

प्रश्न के अनुसार  $१६य + ५ + \frac{५}{२} + \frac{५}{४} + \frac{५}{८} + \frac{५}{१६} = २८०$

दस गुणा करने से  $१६५य + १६ + ५ + ४य + २य + ५ = ४५६२$

योग करने से  $२८०य = ४५६२$

$२८०$  का भाग देने से  $य = १६$

॥ उत्तर का आलाप ॥

१६	दुहर	=	२५६
१६	रुपये	=	१६
१६	अठ्ठात्री	=	८
१६	चौअत्री	=	४
१६	दोअत्री	=	२
१६	एकअत्री	=	१

जोड़ २८०

(४) मेरे पास जो आम थे उनमें से मैंने तिलहार्ड के आम मोहन को दिये और छठे भाग के आम रूपा को दिये और यह सब मिलाकर १५ भये तो बतलाओ कि मेरे पास सब कितने आम थे ॥

कल्पना करो कि य आमों की संख्या है ॥

तो  $\frac{५}{३}$  यह संख्या मोहन को जो आम दिये उनको हार्ड और  $\frac{५}{६}$  यह संख्या रूपा को आमों की हार्ड और प्रश्न के अनुसार ये सब आम मिलाके १५ हैं ॥

अर्थात्  $\frac{५}{३} + \frac{५}{६} = १५$

दस गुणा करने से  $१५ + ५ = ६०$

योग करने से  $३५ = ६०$



४ का भाग देने से  $y = \frac{36}{4} = 9$   
 यह पहिले मनुष्य के गन्नों की संख्या हुई ॥  
 $y + 1 = 10$  यह दूसरे मनुष्य के गन्नों की संख्या हुई  
 $y + 2 = 11$  यह तीसरे मनुष्य के गन्नों की संख्या हुई  
 $y + 3 = 12$  यह चौथे मनुष्य के गन्नों की संख्या हुई  
 (८) एक मनुष्य ने योग लिया और उसके पास  
 १७०० जो धन था उसमें से जितना धन उसने अपने  
 दो लड़कों को दिया उतना ही धन उसने अपनी तीन बेटि  
 यों को दिया और जितना धन मिलकर उसके एक बेटे  
 और बेटी को मिला उतना धन उसने अपनी स्त्री को दिया  
 तो बतलाओ कि प्रत्येक मनुष्य को कितना कितना धन  
 मिला ॥

कल्पना करो एक बेटे का धन  $y$  है ॥

तो तीन बेटियों का संपूर्ण धन  $3y$  है ॥

∴ एक बेटी का धन

$$\frac{3y}{3} \text{ हुआ}$$

और स्त्री का धन  $y + \frac{3y}{3}$  या  $\frac{4y}{3}$  हुआ

इसलिये प्रश्न के अनुसार  $2y + 2y + \frac{4y}{3} = 1700$  रुपये

योग करने से  $4y + \frac{4y}{3} = 1700$

$$\text{वा } \frac{16y}{3} = 1700$$

१० का भाग देने से  $y = 100$

इस गुणा करने से  $y = 100$  यह एक लड़

के का धन हुआ ॥

$\frac{२५}{३} = २००$  यह एक पैर का धन हुआ ॥

$\frac{५५}{३} = ५००$  खी का धन हुआ

(८) एक कुवे में पानी बहुत दूर था उस पर दो पैर लगी एक पैर में तो दो बैल जुते और दूसरी पैर में दो भैंसे और बैल की पैर के चर्स में २ मन पानी समाता था और खी दो षडी में ३ चर्स पानी के खीचते और भैंसे इतने में खीचते कि वे दो चर्स पानी को ३ षडी में खीचते परंतु दोनों पैरों में पानी वशवर ही खिंचता तो बतलाओ कि भैंसे की पैर के चर्स में कितना पानी समाता होगा ॥

कल्पना करो कि भैंसों के चर्स में ५ मन पानी समाता होंगे भैंसे २५ मन पानी तीन षडी में खीचेंगे ॥

और बैल २ षडी में ३ चर्स पानी वा ६ मन पानी खीचते हैं तो इस परिमाण से वे १ षडी में ३ मन पानी खीचेंगे ॥

इस कारण वे ३ षडी में ९ मन पानी खीचेंगे ॥

और २ षडी में दो नोचसों से वशवर ही पानी खिंचता है

∴ २५ = ९ मन पानी ॥

और  $५ = \frac{१५}{३} = ५$  मन पानी इतना पानी भैंसों के चर्स में समाता है ॥

१०७ सीताराम और परसराम के गाँव सड़क के किनारे ३ १/२ मील के अंतर से थे, सीताराम परसराम के गाँव को बतला और जसी सणथ परसराम सीताराम के गाँव को बतला, सीताराम ऐसी कुर्ती से चरता था कि २ १/२

कोरु एक घंटे में चलजाता और परसराम ऐसी शीघ्र  
 तय से चलता कि वह २ कोस १ घंटे में पहुँच जाता  
 तो पतला ओ कि वे दोनों मनुष्य कितनी २ दूर चलकर  
 भिला जायगे और जो वे बराबर चलकर वीक बीच राह  
 में भिला चाहें तो सीताराम को परसराम से कितनी देर  
 पीछे चलना चाहिये ॥

प्रथम कल्पनाकरो कि सीताराम य कोस चलकर प  
 रसराम से निराजाय तो  $४ \frac{१}{२}$  — य कोस परसराम च  
 ला होगा ॥

अब त्रैशिक से जितना २ समय दूर एक को चल  
 ने में लगना उस से निकालते हैं ॥

कोस	कोस	घंटा	घंटा	$\left\{ \begin{array}{l} \text{इतना समय साताराम} \\ \text{को य कोस चलने में लगा} \end{array} \right.$
$२ \frac{१}{२}$	५	१	$\frac{२५}{५}$	
कोस	कोस	घंटा	घंटा	$\left\{ \begin{array}{l} \text{इतना समय परसराम को} \\ \text{४ ३/४ कोस चलने में लगा} \end{array} \right.$
१	$४ \frac{३}{४}$	१	$४ \frac{३}{४}$	

और दोनों मनुष्य बराबर समय तक चले ॥

इस कारण  $\frac{२५}{५} = \frac{४ \frac{३}{४}}{१}$  इस के दोनो पक्षों को ५  
 से वा १० से गुणा किया तो  $५५ = २१ \frac{३}{४}$  — ५५ पक्षों  
 तरानयन से  $५५ = २१ \frac{३}{४}$

इका भाग देने से  $५ = \frac{२१ \frac{३}{४}}{५} = ४ \frac{३}{४}$  इतने कोस सीता  
 गावला और  $४ \frac{३}{४} - २ \frac{१}{२}$  वा २ कोस पर परसराम अपने  
 गोंद से चलकर सीताराम को भिला ओ वहाँ से सीताराम  
 का गोंद २ कोस रह गया दूसरे जो दोनों मनुष्य वीक  
 बीच राह में भिला चाहें तो उनको आधी २ राह चलने में  
 जितना २ समय उनको ही जताके अनुसार लगे गाउसे

त्रैशिक से निकालते हैं ॥

$2\frac{1}{2}$  कोस का आधा  $2\frac{1}{2}$  कोस है

कोस            कोस            घंटा            घंटा

$2\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} :: \frac{2\frac{1}{2} \times 2}{5}$  इतना समय-  
सीताराम को  $2\frac{1}{2}$  कोस चलने में लगेगा ॥

ऐसे ही २ कोस :  $2\frac{1}{2}$  कोस :: १ घंटा :  $2\frac{1}{2}$  इतना

समय पर सराम को  $2\frac{1}{2}$  कोस चलने में लगेगा ॥

अब देखना चाहिये कि किस नरुष्य को कितना समय  
अधिक लगेगा इसलिये  $2\frac{1}{2}$  कोस चलने में कितना

समय दोनों नरुष्यों का लगा उनका अंतर निकाला और  
जानो कि  $2\frac{1}{2}$  घड़ी = १ घंटा और ६० पल = १ घड़ी

$$\frac{2\frac{1}{2}}{2} - \frac{2\frac{1}{2} \times 2}{5} = 2\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \right) = 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{5}{10} \text{ घंटा} = \frac{5}{60} \times 2\frac{1}{2} \text{ घड़ी} = \frac{5}{24} \text{ घड़ी} = \frac{5}{24} \times$$

६० पल =  $22\frac{1}{2}$  पल इतना पहिले पर सराम

पने गाँव से चलेगा और इतने ही समय पीछे सीताराम  
अपने गाँव से चलेगा ॥

(११) एक बनिर्ष के पास दो भाव की पैदा है एक ७ आने  
पनसेरी और दूसरी ६ आने पनसेरी तो इनमें से कितनी  
कितनी पैदा खिलावे जिसे ६ आने ८ पाई पनसेरी की  
भाव की होजाय ॥

कल्पना करो कि ७ आने के भाव की ५ पन सेरी में दालें तो इसको ७ ५ आने दाम होंगे और जो ६ आने के भाव की २ पन सेरी में दालें तो एक पन सेरी के दाम ६ आने होंगे इस लिये दोनों भाव की ( ५ + २ ) पन सेरी के दाम ( ७५ + ६ ) आने दाम हुए परन्तु हम दोनों भाव की नैदा मिलाके ६ आने ८ पाई पन सेरी का दाम किया चाहते हैं इस लिये इस भाव के ( ५ + २ ) पन सेरी के दाम ( ५ + २ ) गुणा ६ आने का नैदा यथा ( ५ + २ ) ६  $\frac{३}{२}$  आने हुए ॥ क्योंकि ८ पाई =  $\frac{६}{२}$  आना =  $\frac{३}{१}$  आना ॥

$$\therefore ७५ + ६ = ( ५ + २ ) \times ६ \frac{३}{२}$$

$$= ६५ + \frac{३}{२} ५ + ६ \frac{३}{२} = ६ + \frac{३}{२}$$

$$१५ + २ = ३ \frac{३}{२} \quad १५ - ६ = ९ \quad ९ - \frac{३}{२} = ६ \frac{३}{२} - ६$$

$$\text{योग करने में } \frac{३}{२} ५ = \frac{३}{२} = \frac{३}{२} \times २$$

$$\therefore ५ = २$$

दूसरा कारण ७ आने के भाव की २ पन सेरी में दालें और ६ आने के भाव की १ पन सेरी में दालें दोनों मिलाकर माय तो निशी हुई में दालें के ६ आने ८ पाई पन सेरी के दाम होंगे ॥

(२) एक खेत २ नाज को एक आदमी ५ दिन में काट लेता है और दोसरे खेत के नाज को एक लड़का ७ दिन में काट लेता है जो आदमी और लड़का दोनों मिल कर एक खेत के नाज को काटें तो वे कितने दिन में खेत काट लेंगे ॥

कहना करो कि वे दोनों ५ दिन में काट लेंगे और आदमी

सब नाज को अकेला ५ दिन में काट लेता है ॥

इसलिये वह एक दिन में सब नाज का  $\frac{1}{5}$  भाग काट लेगा ऐसे ही लड़का अकेला एक दिन में सब नाज का  $\frac{1}{6}$  भाग काट लेगा इस कारण लड़का और आदमी दोनों मिल कर एक दिन में सब नाज का  $(\frac{1}{5} + \frac{1}{6})$  वा  $\frac{11}{30}$  भाग काट लेंगे परंतु आदमी और लड़का दोनों ५ दिन में सब नाज को काट लेंगे इसलिये वे एक दिन में सब नाज का  $\frac{1}{5}$  भाग काटेंगे

$$\therefore \frac{11}{30} = \frac{1}{5} \text{ वा } 5 = \frac{30}{11} = 2 \frac{8}{11} \text{ दिन पही उतर हुआ ॥}$$

(१३) विकोरिगानाम इस्लिस्तान की महारानी का जन्म २४ मई सन् ५ को हुआ और ऐल बर्ट राजकुमार

का जन्म २६ अगस्त सन् ५+९ को हुआ और उसका विवाह १० फरवरी सन् १८४० ई० को हुआ और २६ अगस्त सन् १८४८ को दोनों महारानी और राजकुमार की अवस्थाओं का योग राजकुमार की अवस्था जो विवाह के पहिले थी उससे तीन गुना मात्तम हुआ तो बतलाओ कि दोनों का किस वर्ष में जन्म हुआ ॥

प्रश्न के अनुसार उन दोनों के जन्म वर्ष ५+९ हैं तो २६ अगस्त सन् १८४८ को ॥

१८४८ — ५ = महारानी की अवस्था, क्योंकि जिस संवत् तक की अवस्था निकालनी हो उस संवत् में से जन्म के संवत् को घटाओ तो अंतर अवस्था के तुल्य होगा ॥

और १८४८ — (५+९) = राजकुमार की अवस्था ॥

और विवाह के आगे राज कुमार की अवस्था =  $१८३८$   
 $-(५+२)$

॥ दूसर लिये पद्म के अनुसार ॥

$१८४८ - ५ + १८४८ - (५+२) = ३ \{ १८३८ -$   
 $(५+२) \}$

वा  $१८४८ - ५ + १८४८ - ५ - २ = ५५१७ - ३५ - ३$   
 पक्षांतरानवन् से  $३५ - २५ = ५५७ - ३ + २ - १८४८$   
 $- १८४८$

∴ योग करने से  $५ = \frac{५५१८}{-३६६६} = १८३६$  यह पद्मिनी  
 का और  $५ + २ = १८३६ + १ = १८३७$  यह राज कु  
 मार का जन्म वर्ष हुआ ॥

(१४) एक दौड़ में ३ ऐसी मोरी लगी हैं कि उनमें से जो  
 एक मोरी की राह हो कर पानी आवे तो दौड़ ५ घड़ी में भर  
 जाता है और जो दूसरी मोरी की राह हो कर पानी आवे तो  
 दौड़ ६ घड़ी में भर जाता है और जो तीसरी मोरी में हो कर  
 पानी आवे तो दौड़ १० घड़ी में भर जाता है बतलाओ कि  
 जो एक साथ तीनों मोरियों में हो कर पानी आवे तो दौड़ -  
 कितनी घड़ी में भर जायगा ॥

कल्पना करो कि य, इष्ट घड़ी हैं ॥

पद्मिनी मोरी की राह से ५ घड़ी में सब पानी भर जाता है  
 दूसर लिये एक घड़ी में उसी मोरी की राह सब पानी का  $\frac{१}{५}$   
 भाग दौड़ में भर जायगा और दूसरी मोरी की राह से ६ घ  
 डी में सब पानी भर जाता है इस लिये  $\frac{१}{६}$  घड़ी में उसी मोरी  
 की राह सब पानी का  $\frac{१}{६}$  दौड़ में भर जायगा ऐसे ही तीसरी  
 मोरी की राह से १० घड़ी में सब पानी का  $\frac{१}{१०}$  भाग दौड़ में भर

रजापगा ॥

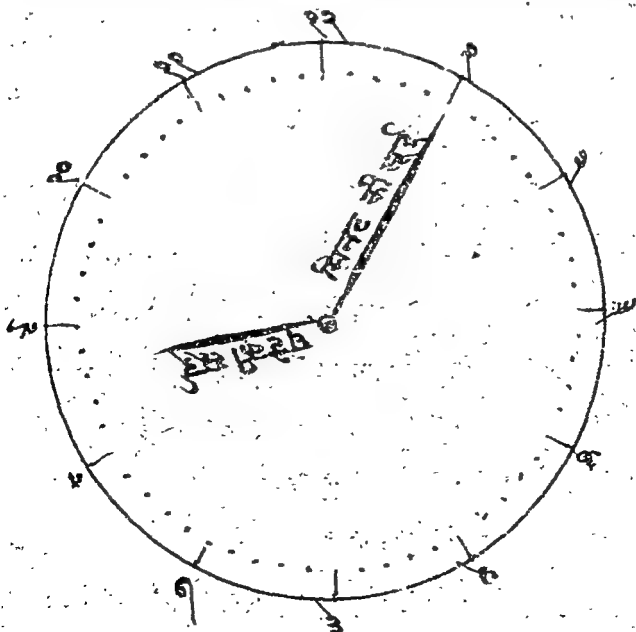
इसकारण जब तीनों भोरी एक साथ चलेंगी तो २ घड़ी में सब पानी का  $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$  भाग होज में भर जायगा परन्तु तीनों भोरियों की गृह से य घड़ी में सब पानी भर जाता है इसलिये एक घड़ी में तीनों भोरियों की गृह से सब पानी का  $\frac{1}{2}$  भाग होज में भर जायगा ॥

$$\therefore \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3 + 2 + 1}{12} \text{ वा } \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = \frac{6}{3} = 2 \frac{1}{3} \text{ घड़ी ॥}$$

(१५) एक विद्यार्थी ने अपन गुरु से पूछा कि कै वजे है गुरु ने उत्तर दिया कि २ और २ कबीब समय है और घंटे की सुई और मिनट की सुई एक स्थान पर है तो बताओ कि





जीक ज्वा समय है घड़ी में घट्टकी परिधि के तुल्य ६ भाग  
 होते हैं और जो सूई जितने समय में वे से एक भाग में चल  
 जाती है उतने समय का मिनट वा २ ३ पल कहते हैं और  
 इस कारण उस सूई को मिनट की सूई बोलते हैं और  
 वह सूई १२ के चिन्ह से चलकर साठों भागों में फिर कर  
 फिर उसी १२ के चिन्ह तक आ जाती है उतने समय को  
 १ घंटा वा २ ३ घड़ी कहते हैं परंतु घंटा बताने के लिये ए  
 क और सूई रहती है उसे घंटे की सूई बोलते हैं यह सू  
 ई १२ के चिन्ह से १ के चिन्ह तक १२ घंटे में फिर कर आ  
 जाती है इस लिये परिधि के अंश १२ बड़े तुल्य भाग  
 होते हैं उन में से एक भाग में घंटे की सूई एक घंटे में फिर  
 ती है और उसी परिधि के छोटे छोटे ६० भाग हैं इस लिये  
 एक बड़े भाग में  $\frac{60}{12}$  वा ५ छोटे भाग होते हैं इस हेतु  
 मिनट की सूई एक घंटा वा ६० मिनट में साठों छोटे भा  
 ग में घूम जाती है और घंटे की सूई एक घंटे में ५ छोटे भा  
 गों में घूमती है इस कारण मिनट की सूई घंटे की सूई से  
 १२ गुना जल्दी चलती है और हर घंटे में घंटे की सूई  
 और मिनट की सूई एक बार मिल जाती हैं कारण यह है  
 कि मिनट की सूई को चौगिर्ह घूमते में घंटे की सूई कहीं न  
 कहीं चलती अवश्य मिलती होगी और मिनट की सूई हर  
 एक घंटे के अन्त में फिर फिर कर बारह के चिन्ह पर आ जा  
 ती है इस कारण जब घंटे की सूई एक घंटे के चि  
 न्ह पर होगी तो मिनट की सूई १२ के चिन्ह पर होगी इ  
 स लिये दोनों सूई के बीच में ५ छोटे भाग होंगे ऐसे ही  
 जब घंटे की सूई २ घंटे के चिन्ह पर होगी तो दोनों सूई

के बीच में १० छोटे भाग होंगे । ऐसे ही और जानो ॥

कल्पना करो कि एक बजे के पीछे मिनट की सूई ने १२ के चिन्ह से य, मिनट तक गति की है तो वह अवश्य य, छोटे भागों में गति करेगी और १२ के चिन्ह से १ घंटे के चिन्ह तक ५ छोटे भागों का अंतर है इसलिये (य-५) इतने स्थान में घंटे की सूई एक घंटे के चिन्ह से गति करेगी और पहिले लिख ही चुके हैं कि घंटे की सूई से मिनट की सूई १२ गुने स्थान में गति करती है ॥

$$\therefore य = १२ (य - ५)$$

$$= १२ य - ६०$$

पक्षांतरानयन और योग करने से १२ य = ६०

$$११ का भाग देने से य = \frac{६०}{११} = ५ \frac{५}{११}$$

इस कारण एक बजे के उपरान्त  $५ \frac{५}{११}$  मिनट में घंटे और मिनट दोनों की सूई मिल जाती है ॥

(१६) आगरे से कोयल ३० कोस है और एक घोड़े की डाक आगरे से चल कर कोयल में ६ घंटे में आ पहुँची और जिस समय आगरे की डाक चली उस से एक घंटे पीछे कोयल की डाक चली और वह आगरे तक ७ घंटे में पहुँची तो बतलाओ कि वे दोनों डाक-आगरे से कितनी दूर पर सड़क में मिली होंगी ॥

कल्पना करो कि दोनों डाक आगरे से य, कोस पर मिलती हैं तो उस मिलने के स्थान से कोयल (३० - य) कोस दूर रह जायगी आगरे की डाक ६ घंटे में ३० कोस तक जाती है इसलिये वह डाक १ घंटे में  $\frac{३०}{६}$  या ५ कोस चलती

दोगी ऐसे ही कोयल की डाक एक घंटे में  $\frac{30}{9}$  कोस चलेगी ॥

॥ त्रैशिक से ॥

कोस कोस घंटा घंटा

५ : ५ :: १ :  $\frac{५}{९}$  इतना समय आगरे की डाक कोयल कोस चलने में लगेगा

कोस कोस घंटा  $\frac{७(३०-५)}{३०}$  इतना समय कोयल ३० : (३०-५) :: ७ : की डाक को (३०-५)

कोस चलने में लगेगा और कोयल की डाक आगरे की डाक से १ घंटा पीछे चली है इसलिये कोयल की डाक के समय में एक घंटा और मिला दो तो योग आगरे की डाक के समय के बराबर होगा ॥

$$\therefore \frac{५}{५} = \frac{७(३०-५)}{३०} + १$$

$$= \frac{७(३०-५) + ३०}{३०}$$

$$३० \text{ का गुणा करने से } ६५ = ७(३०-५) + ३०$$

$$= २१० - ७५ + ३०$$

$$\text{पक्षांतरानयन और योग करने से } १३५ = २४०$$

$$१३ का भाग देने से } ५ = \frac{२४०}{१३} = १८ \frac{६}{१३} \text{ कोस}$$

पर आगरे से दोनों डाक मिलीं होंगी ॥

(१०) एक पत्थर १३ मन ३२ सैर का है और दूसरा पत्थर २७ सैर का और ६ हाथ लंबा एक मजबूत लड़ा

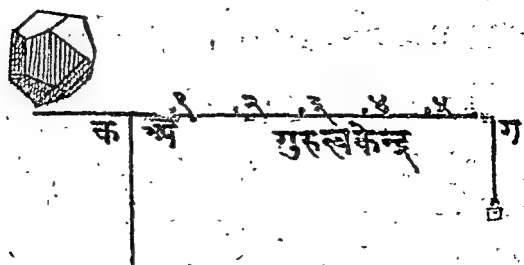
हैं तो बलना ओकि भारी पत्थर से कितनी दूर पर रोक  
लगावे जिस पर लहे कोर खकर उसके छोर पर भारी प  
त्थर को लवको करवा रख कर दूसरे सिरे पर हल का प  
त्थर लटका दें जिसे भारी पत्थर ऊपर को उठ आवे ॥

गति विद्या में यह बात निकलती है कि सरलोत्तोलन  
दण्ड के एक छोर पर जो बोन वावल लम्ब रूपी लगाया जा  
य तो वह आधार के गिर्ह घूमै गा वा उसका एक भुजनी  
चे को रुकेगा और दूसरा ऊपर को चढ़ जाय गा और अधा  
र से जितनी दूर पर बल वा बोन लगा हो उस दूरी के बल  
आ बोन के परिमाण से गुणा करो तो धत उस दंड के अधा  
र पर घूमने की शीघ्रता का मापक होगा ॥

वा उस बोन के गति कारक वेग का परिमाण होगा ॥

सरलोत्तोलन दंड का अर्थ उठाने की सीधी लकड़ी  
है जैसे तराजू की डंडी ठेंकली भुज आदि को गति विद्या  
में उत्तोलन दंड कहेंगे आधार शब्द का अर्थ रोक वा  
देक है जैसे तराजू की डंडी के बीच में जो छेद होता है  
और उसमें रस्सी पिरो के कपड़ा बांध लेते हैं उस स्था  
न पर जो डंडी को उंगली पर आम्भो तो दोनों ओर तुली  
रहैगी इस

लिये स्थान  
की संज्ञा आ  
धार रक्ती  
है पर तुल  
तना अब



अब चाहिये कि डंडी कि सीज गह से नवतीन दो अर्थात्

उसका काष्ठ अतिकमोर हो प्रथम दस्त प्रश्न में लठे बाइंही का बोझ नगिनो ॥

कल्पना करो कि क ग दंड है और आधार बाटेक है और क छोर पर के भारी बोझ के उठाने के लिये ग छोर पर दलका बोझ लटकाया गया है और कल्पना करो कि क अ भुज = य हाथ तो अ ग = ६-य हाथ ।

$$१३ मन ३२ सेर = ५५२ सेर$$

भारी बोझ के परिमाण ५५२ सेर को उसके आधार की य दूरी से गुणा करो तो घात दंड के एक भुज पर जो भारी बोझ का दबाव होगा उसका परिमाण होगा जैसे ५५२ x य ऐसे ही दूसरे भुज पर जो दलके बोझ का दबाव होगा उसका २४ (६-य) होगा और जब दंड के दोनों भुज पर समान दबाव होगा तो दंड आधार पर स्थिर रहेंगा ॥

$$\begin{aligned} \text{दूसरे कारण } ५५२ य &= २४ (६-य) \\ &= १४४ - २४ य \end{aligned}$$

$$\text{पश्चात्तरानयन से } ५७६ य = १४४$$

$$\therefore य = \frac{१४४}{५७६} = \frac{१}{४} \text{ हाथ} = २ गिरह दस्त लिये$$

जो टेक दंडे बोन से दो गिरह पर लगार्द जायतो दोनों बोझों नों और तुले रहेंगे इस कारण जो टेक दो बड़े बोझ की और हटाकर रखे तो बड़ा बोझ उठ जायगा ॥

कारण यह है कि छोटे बोझ का रुकाव अधिक हो जाता है

दूसरे जो लठ बाइंही ऐसी हो कि वह वरावर एक सी लट हो और उस नगद बोझ में भी एक सी हो अर्थात् उस द एही की लठड़ी ऐसी न हो कि उसका एक भाग दूसरे जतने बड़े भाग से तो ल में अधिक हो ऐसी द एही को जो बोझ नीच

आम्हो गे तो वह उस स्थान पर उदगीर दैगी अर्थात् दण्डी का गुरुत्व केन्द्र उसके बीच बीच में होगा और पूर्वोक्त पक्ष में कल्पना करे कि दण्डी का बोर २० सेर है ॥

तो ६ हाथ की दण्डी के बीच में ३ हाथ पर गुरुत्व केन्द्र का स्थान होगा और इसलिये उसकी दूरी आधार से ३-य होगी ॥

गति विद्या के साधक के अनुसार जब दोनो बोर तुले रहेंगे।

तो 
$$\begin{aligned} ५५२य &= २४(६-य) + २०(३-य) \\ &= १४४ - २४य + ६० - २०य \\ &= २०४ - ४४य \end{aligned}$$

पश्चात्त गनयन से  $५६६य = २०४$   
 $५६६$  का भाग देने से  $य = \frac{२०४}{५६६}$  हाथ =  $\frac{२०४ \times ८}{५६६}$  गिरह  

$$= \frac{२०४ \times २}{१४६} = २ \frac{३}{४} = \frac{१ \frac{३}{४}}{१४६}$$
  
 $= २.७४$  गिरह

इसलिये जो टेक बड़े बोर से २.७४ गिरह से कम दूरी पर लगाई जाय तो बड़ा बोर उठ जायगा ॥

तीसरे जो सामान्य दंडी हो जैसी उत्तल कड़ी आदि - तोलने की दंडी होती है और कल्पना करे कि ६ हाथ की दंडी का गुरुत्व केन्द्र आधार की ओर दंडी के सिरे से  $३ \frac{१}{२}$  हाथ पर है तो गुरुत्व केन्द्र स्थान आधार से  $३ \frac{१}{२} - य$  हाथ की दूरी पर होगा और मानो कि दण्डी का बोर २० सेर है ॥

गति विद्या के साधक के अनुसार जब दोनो बोर तुले रहें

गोतो 
$$\begin{aligned} ५५२य &= २४(६-य) + २०(३ \frac{१}{२} - य) \\ &= १४४ - २४य + ७० - २०य \end{aligned}$$

$$= २१४ - ४४५$$

पक्षान्तरानयनसे ५८६५ = २१४

$$\therefore y = \frac{२१४}{५८६५} \text{ हाथ} = \frac{२१४ \times ८}{५८६५} \text{ गिरह}$$

$$= \frac{२१४ \times २}{१४६} = २ \frac{३}{४} \text{ गिरह} \frac{१८}{१४६}$$

$$= २.८१ \text{ गिरह}$$

इसलिये जो टेक बड़े बोग से २.८१ गिरह से कम दूरी पर खगाई जाय तो बड़ा बोग उठ जायगा ॥

(१८) केवल दूध का सजातीय गुरुत्व १.०३ है और पानी मिले दूध का सजातीय गुरुत्व १.०२६२५ है तो वतलाओ कि दूध में कितना पानी मिला है ॥

परिभाषा जितने स्थान में एक पदार्थ अम्बाता दोष में जितना जल अम्बावे उसके बोग से जै गुना पदार्थ का बोझ दो उसे उस पदार्थ का सजातीय गुरुत्व कहते हैं ॥

जैसे चाँदी का सजातीय गुरुत्व १०.५ वा १०.३ है इस्से यह अर्थ है कि जितने स्थान में कुछ चाँदी अम्बाती है उसमें जितना जल अम्बाय उसके १०.३ गुने बोझ के बराबर चाँदी का बोझ होगा ॥ ऐसे ही दूध का १.०३ यह जो सजातीय गुरुत्व लिखा है उसका भी यह अर्थ है कि जितने स्थान में कुछ दूध अम्बाता दोष उसने स्थान में जो जल भर दिया जाय तो उसके बोग से दूध का बोझ १.०३ गुना होगा ॥

कल्पना करो कि य सेर दूध में १ सेर पानी मिला है तो केवल य सेर दूध का बोग य सेर पानी के १.०३ के गुने बोग भर होगा ॥

अर्थात्

य सेर केवल दूध का बोझ =  $१.०३$  गुना य सेर पानी का बोझ  
 =  $१.०३ \times य \times १$  सेर पानी का बोझ ॥

$\therefore$  य सेर = य गुणा १ सेर वा य  $\times$  १ सेर

इसलिये य सेर दूध में १ सेर पानी मिलाया तो य सेर दूध और एक सेर पानी का बोझ ॥ वा

$$(य \times १) \text{ सेर पानी मिले दूध का बोझ} = १.०३ \times य \times १ \text{ सेर पानी का बोझ} \\ + १ \text{ सेर पानी का बोझ} \\ = (१ + १.०३ य) \times १ \text{ सेर पानी का बोझ}$$

परन्तु प्रश्न के अनुसार पानी मिले दूध का सजातीय गुरुत्व  $१.०२६२५$  है वा पानी मिला दूध केवल पानी से बोझ में  $१.०२६२५$  गुना है इसलिये पानी मिले दूध  $(य + १)$  सेर का बोझ केवल पानी  $(य + १)$  सेर के बोझ से  $१.०२६२५$  गुणा होना अर्थात्

$$(१) \text{ सेर पानी मिले दूध का बोझ} = १.०२६२५ \times (य + १) \text{ सेर केवल पानी का बोझ} \\ = १.०२६२५ \times य + १ \times १ \text{ सेर पानी का बोझ}$$

$$\therefore (य + १) \text{ सेर पानी} = (य + १) \text{ वार } १ \text{ सेर पानी ॥} \\ = (य + १) \times १ \text{ सेर पानी ॥}$$

और आगे लिख लीचके हैं कि  $(य + १)$  सेर पानी मिले दूध का बोझ =  $(१ + १.०३ \times य) \times १$  सेर पानी का बोझ ॥

$$\therefore (१ + १.०३ \times य) \times १ \text{ सेर पानी का बोझ} = १.०२६२५ \times य + १ \times १ \text{ सेर एक सेर पानी का बोझ इसका भाग देने से} \\ १ + १.०३ \times य = १.०२६२५ (य + १)$$



पश्चात्तरानयन से (१०३-१०२६२५)  $y = १-२६२५-१$

योग करने से .००३७५  $y = .०२६२५$

.००३७५ का भाग देने से  $y = \frac{.०२६२५}{.००३७५} = ७$

इस्ते मालूम पड़ता है कि ७ सेर दूध में १ सेर पानी मिला है  
इसलिये पानी मिले दूध में अष्टमांश पानी है ॥

(१६) एक मनुष्य कानगर चंचे पर बसता था उसने कुछ दूर  
पर बंदूक छूटती बेर उजाला देखा और इसके २६  $\frac{१}{३}$  विप-  
लवा  $१० \frac{२}{३}$  से कण्ड पीछे बंदूक की आवाज सुनी तो बतलाये  
कि बंदूक उस मनुष्य से कितनी दूर पर छूटी और मानो कि उ-  
जाला १ सेकेंड वा  $२ \frac{२}{३}$  विपल में २६२००० मील चलता है  
और शब्द १०६० फुट एक सेकेंड में पहुँचता है ॥

कल्पना करो कि मनुष्य से य दूरी पर बंदूक छूटी उजा-  
ला बंदूक से जितने सेकेंड में मनुष्य तक पहुँचा उसका परि-  
माण त्रैशिक से निकालते हैं ॥

मील	मील	सेकण्ड	सेकण्ड
१६२०००	५	१	१६२०००

$३ \times १७६०$  या  $५२९०$  फुट का १ मील होता है ॥

शब्द बंदूक से निकल कर जितने सेकेंड में मनुष्य तक पहुँ-  
चा उसका परिमाण त्रैशिक से निकालते हैं ॥

$y$  मील =  $३ \times १७६० \times y$  फुट

फुट	फुट	सेकेंड	सेकेंड
१०६०	$३ \times १७६० \times y$	१	$\frac{३ \times १७६० \times y}{१०६०}$

और प्रश्न के अनुसार उजाला और शब्द के पहुँचने में  
 $१० \frac{२}{३}$  सेकण्ड का अन्तर है ॥

$\therefore \frac{३ \times १७६० \times y}{१०६०} - \frac{y}{१६२०००} = १० \frac{२}{३}$

$$\frac{3 \times 195 \times 10000 - 1000}{1000 \times 100000} \times 2 = 10 \frac{2}{3}$$

$$1000 \times 100000 \times 10 \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3 \times 195 \times 1000000 - 1000}{217988000} = 2 \frac{1}{2} \text{ मील ॥}$$

(२७) सोने का सजातीय गुरुत्व  $19 \frac{1}{8}$  है और चाँदी का सजातीय गुरुत्व  $10 \frac{2}{3}$  है और एक सुनार के पास चतुर्थांश घन फुट सोना २६० पौण्ड वा १३० सेर है तो वह तलाओ कि वह केवल सोना ही है वा उसमें चान्दी मिली है और जो चान्दी मिली है तो कितना सोना है और कितनी चाँदी है घन फुट का अर्थ है एक फुट लंबा एक फुट चौड़ा और एक फुट गहरा और १६ औन्स वा ८ छटांक का एक पौण्ड वा आध सेर होता है ॥

एक घन फुट पानी में १००० औन्स वा ५०० छटांक बोझ होता है और सुवर्ण पानी से  $19 \frac{1}{8}$  गुना भारी होता है इस लिये १ घन फुट सोना १ घन फुट पानी के बोझ से  $19 \frac{1}{8}$  गुना भारी होगा वा  $19 \frac{1}{8} \times 1000$  औन्स वा ९६२५० औन्स तौल में होगा और इस कारण  $\frac{1}{8}$  घन फुट सोना ४८१२ औन्स वा ३०० पौण्ड और  $12 \frac{1}{2}$  औन्स तौल में होगा और सुनार के पास जो  $\frac{1}{4}$  घन फुट सोना है वह २६० पौण्ड तौल में है इस कारण वह केवल सोना ही नहीं है ॥

१ घन फुट चान्दी एक घन फुट पानी के वारु से  $10 \frac{2}{3}$  गुना होती है वा  $10 \frac{2}{3} \times 1000$  औन्स वा १०५०० औन्स तौल में होती है इस कारण  $\frac{1}{4}$  घन फुट चान्दी २६२५ औन्स वा १६४ पौण्ड और १ औन्स तौल में होगी और सुनार के पास

जो १ घन फुट सोना है वह २६० पौण्ड तौल में है इस कारण वह चान्दी से अधिक भारी है और सोने से हलका इसलिये उस सोने में चान्दी और सोना दोनों मिले हैं ॥

कल्पना करो कि १ घन फुट का  $\frac{1}{8}$  भाग सुवर्ण है तो  $\frac{1}{8} - \frac{1}{8}$  भाग चान्दी होगी और ऊपर लिख ही चुके हैं कि १ घन फुट सुवर्ण १८२५० औन्स तौल में होता है इसलिये १ घन फुट का  $\frac{1}{8}$  भाग सुवर्ण  $\frac{1८२५०}{८}$  औन्स तौल में होगा ऐसे ही  $(\frac{1}{8} - \frac{1}{8})$  भाग चान्दी १०५००  $(\frac{1}{8} - \frac{1}{8})$  तौल में होगी परन्तु प्रश्नके अनुसार चान्दी और सोना दोनों का बोझ निसकर २६० पौण्ड वा ४१६० औन्स है ॥

$$\therefore \frac{1८२५०}{८} + १०५०० \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right) = ४१६०$$

$$\frac{1८२५०}{८} + \frac{१०५००}{८} - \frac{१०५००}{८} = ४१६०$$

$$\frac{1८२५०}{८} + २६२५ - \frac{१०५००}{८} = ४१६०$$

य से गुणा किया तो १८२५० + २६२५ य - १०५०० = ४१६० य

पक्षांतरानुसंधन और योग करने से १५३५ य = ८०५०

$\therefore य = \frac{८०५०}{१५३५} = \frac{१६१०}{३०७}$  इसभिन्न को ३०७ हरके स्थान

में आसन्न भाग जानने के लिये ३०० रक्खा। तो

$$य = \frac{१६१०}{३००} = \frac{१६१}{३०} = \frac{३५}{६} \therefore य = \frac{१}{३५} = \frac{६}{३५ \times ४}$$

$\frac{24}{80}$  यह सुवर्ण का परिमाण हुआ और  $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} =$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$  यह चान्दी का परिमाण हुआ ॥

इसलिये जो १ संपूर्ण घन फुट के १४० तुल्य खण्ड किये जायें तो चतुर्थांश घन फुट में २४ भाग सुवर्ण होगा और ११ भाग चान्दी क्योंकि  $२४ + ११ = ३५ \times ४ = १४०$  ॥

### ॥ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

(१) वह कौन सी संख्या है कि जो उस संपूर्ण संख्या में उसका आधा जोड़ दें तो योग २४ हो ॥

(२) वह कौन सी संख्या है कि जो उसमें उसके दो तृतीयांश जोड़ दें तो योग २० हो ॥

(३) वह संख्या कौन सी है कि जो उसके आधे और तृतीयांश में ३ का अंतर हो ॥

(४) वह कौन सी संख्या है कि उसका चतुर्थांश उसके पंचमांश से ३ के तुल्य बड़ा हो ॥

(५) एक ऐसी राशि है कि उसमें से छ घटाकर शेष को ६ से गुणा कर घात निकाल लो और उस पूर्व राशि में से जो ४ को घटाकर शेष को ४ गुणा कर दो तो यह घात पूर्व घात के तुल्य हो जाता है तो बतलाओ कि ऐसी कौन सी राशि है ॥

(६) ४० को दो ऐसे खंड करो कि जो छोटे खण्ड के दशांश को बड़े खण्ड के पंचमांश में से घटा दें तो शेष ५ रह जाय ॥

(७) २५ के ऐसे दो भाग करो कि एक भाग दूसरे भाग के तीन चतुर्थांश के तुल्य हो ॥

(८) दो ऐसी राशियाँ निकालो जो बड़ी राशि में छोटी राशि

का भाग दें तो लब्धि ७ मिले और जो बड़ी राशि में से छोटी राशि को घटा दो तो भी शेष ७ ही रहे ॥

(६) २० रूपयों को ४ लड़कों में इस रीति से बाँटें कि सब से बड़े लड़के को दूसरे लड़के से ५ अधिक मिले और दूसरे लड़के को तीसरे लड़के से ५ अधिक मिले और ऐसे ही तीसरे लड़के को चौथे लड़के से ५ सिवाय मिले ॥

(१०) ३३ हाथ रस्ती दें उसके ऐसे चार टुकड़े करो कि दूसरा टुकड़ा पहिले टुकड़े से १  $\frac{२}{३}$  हाथ बड़ा हो और तीसरा टुकड़ा दूसरे टुकड़े से २  $\frac{२}{३}$  हाथ बड़ा हो और चौथा टुकड़ा तीसरे टुकड़े से ३  $\frac{२}{३}$  हाथ बड़ा हो ॥

(११) सराफ़ की दुकान पर ७३ अठनी और चौअनी भुजाने गया और मने उस्से कहा कि मुझे अठनियों से चौअनियों देनी दे तो बतलाओ कि वह मुझे कितनी अठअनियाँ देगा और कितनी चौअनियाँ ॥

(१२) बराबर दो अनी बराबर चौअनी बराबर अठअनी और बराबर रूपये मिलकर १५ के तुल्य हैं तो बतलाओ कि दो अनी चौअनी आदि कितनी २ हैं ॥

(१३) मेरे पास जितने रूपये हैं उनसे पाँच गुनी अठनियाँ हैं और सर्वधन २८ रूपये हैं तो बतलाओ कि मेरे पास कितने रूपये हैं और कितनी अठअनियाँ ॥

(१४) एक लड़के की अवस्था से बाप की अवस्था चौगुनी है परन्तु तीन वर्ष पहिले पिता की अवस्था लड़के की अवस्था से सात गुनी थी तो बतलाओ कि हर एक की क्या अवस्था है ॥

(१५) एक मनुष्यके दो पुत्र हैं उनमें बड़ा पुत्र छोटे पुत्र

से १ वर्ष बड़ा है और दोनों पुत्रों की अवस्थाओं का योग पिता की अवस्था के तुल्य है और जो पिता की अवस्था में बड़े पुत्र की अतुल्यता अवस्था जोड़ें तो उसकी ८० वर्ष की अवस्था होजायती बतलाओ कि हर एक की अवस्था क्या होगी ॥

(१६) एक पुरुष और स्त्री की अवस्था मिलकर ८० वर्ष की है और २० वर्ष पहिले स्त्री की अवस्था पुरुष की अवस्था का दो तृतीयांश थी तो बतलाओ कि हर एक की अवस्था क्या है ॥

(१७) एक ऐसा भिन्न है कि उसका हर अंश में १ के तुल्य बड़ा है और जो अंश में से १ घटा दो और हर में एक जोड़ दो तो भिन्न  $\frac{1}{2}$  के तुल्य होजाता है तो बतलाओ कि पूर्व भिन्न कौनसा है ॥

(१८) एक ऐसा भिन्न है कि उसका अंश हर से २ के तुल्य छोटा है और जो अंश में से १ घटा दो और हर में अंश जोड़ दो तो भिन्न  $\frac{1}{3}$  के तुल्य होजाता है तो बतलाओ कि पूर्व भिन्न कौनसा है ॥

(१९) एक विद्यार्थी से पूछा कि तू एक संख्या के आधे में ४ का भाग है और दूसरी आधी संख्या में ६ का भाग है और दोनों लब्धियों का योग बतला दे तो उस विद्यार्थी ने शीघ्रता से एक ही बार उत्तर लाने के लिये संपूर्ण संख्या में ५ का भाग दिया परंतु इस लब्धि से शुद्ध उत्तर २ के समान बड़ा है तो बतलाओ कि वह कौन सी संख्या है ॥

(२०) १२ बजे के उपरान्त घंटे की सुई ठीक भिन्न की सुई के समान है तो बतलाओ कि १२ घंटे के भिन्न कौनसा है ॥

हैं ॥

(२१) एक मनुष्य के पास घड़ी थी उससे जब मने पूछा कि कैसे हैं तो उसने मेरी परीक्षा करने के लिये सत्र दिया कि ५ और ६ बजे के बीच में समय है और घंटे की सुई और मिनट सुई एक स्थान पर हैं तो बतलाओ कि ५ पै कितने मिनट व्यतीत हुए होंगे ॥

(२२) एक मनुष्य को आवश्यक काम के लिये एक कोस गाँव है वहाँ भेजा परंतु उसे कुछ कदना चाकरी रह गया था दूसरे लिये उसे लौटने के अर्थ १ घड़ी पीछे से दूसरा मनुष्य भेजा पहिला मनुष्य दूसरे परिमाण से चलता था कि वह ४ कोस ६ घड़ी में पहुँच जाता और दूसरा मनुष्य ४ कोस ६ घड़ी में पहुँच जाता तो बतलाओ कि दूसरे मनुष्य को पहिला मनुष्य गाँव से कितनी दूर पर मिलेगा ॥

(२३) एक ढोङ में तीन मोरियों की राह से २० पल में ८२० मन पानी भर जाता है और तीसरी मोरी में हाकर जितना जल एक पल में आता है उसे १ मोरी में तो ५ मन पानी दर पल में कमती आता है और दूसरी मोरी में दर पल में १० मन पानी अधिक आता है तो बतलाओ कि दर एक मोरी की राह से दर पल में कितना जल ढोङ में गिरता है ॥

(२४) एक आदमी और लड़के ने १ खेत काटने को ३२ आने का वे कालिया परंतु जब संपूर्ण काम का दो पंचमाश हो गया तब लड़का बैठ रहा और आदमी अकेले ने काम समाप्त किया और जितने दिनों में वे मिलकर काम करते उन से १/४ दिन अधिक लगा और लड़का आदमी से आधा काम करता दूसरे लिये लड़के को मर्ह से आधी पज डूरी मिलती तो

बतलाओ कि दोनोंको क्या रोज मिलता होगा ॥

॥ १ अभ्यास के लिये परिभाषा संबंधी जो प्रश्न हैं उनके उत्तर नीचे लिखे हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	२०	(५)	१३	(९)	३६	(१३)	३५
(२)	६	(६)	३५	(१०)	६२	(१४)	६५
(३)	७	(७)	६२	(११)	०	(१५)	६५
(४)	०	(८)	१०	(१२)	२		

(१६)	२, २क, कय, ३कय, म, यय, पय, कय
(१७)	५ (२१) ३० (२५) ९ (२६) ३
(१८)	११ (२२) १० (२६) २३ (३०) म+न-५
(१९)	१२ (२३) ८ (२७) १४
(२०)	७ (२४) ३ (२८) १ $\frac{३०}{४}$

॥ २ अभ्यास के लिये परिभाषा संबंधी जो प्रश्न हैं उनके उत्तर नीचे लिखे हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	१८	(५)	०	(९)	२	(१३) म+न-४५	
(२)	०	(६)	४६ $\frac{१}{२}$	(१०)	६	(१४)	४
(३)	१४	(७)	२३	(११)	२३	(१५)	-२
(४)	६५०	(८) म+न-६४५ (१२)	९	(१६)	-२		

॥ ३ अभ्यास के लिये जो जो योग संबंधी प्रश्न हैं उनके उत्तर नीचे लिखे हैं ॥



## उत्तर नीचे लिखे हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	२अ+२क	(१६)	२+५अ
(२)	२अ	(२०)	२अ+६ग
(३)	२अ-२क	(२१)	३ल-२र
(४)	२अ	(२२)	३अ+अक-२क
(५)	२अ+२ग	(२३)	६-५य
(६)	१+म+न	(२४)	२अग+२कघ
(७)	७म-१	(२५)	२अय-२कर
(८)	४दर+४य	(२६)	२य+२अ
(९)	५-२व+८	(२७)	अ+क+ग
(१०)	६अक-कग+कप	(२८)	य+यर+र+मय +नर
(११)	मन+म-न+१	(२९)	५यर-३अयर -अय+य
(१२)	३अय+२कर	(३०)	$\frac{३}{२}$ अय + $\frac{३}{२}$ कघ -गघ + $\frac{३}{२}$ अक-अग
(१३)	५अ-५क+५ग		
(१४)	४यर-य-४		
(१५)	३व-२प+पव		
(१६)	२प+२व		
(१७)	८अक+अग-१		
(१८)	४य+३र		

॥ ४ अथ्यास के लिये व्यवकलन संबंधी जो उदाहरण हैं उनके उत्तर नीचे लिखे हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	अ-क+य	(३)	५अ-३ग
(२)	२क-२ग	(४)	८अ-७क

- (५) घ-र-र-ल (१३) को + ३ ग  
 (६) अघ + २ कर - २ ग (१४) रअघ - २ अ - २ प  
 (७) क ग - २ अक + २ अ (१५) रअक + ३ अ ग + २ ग  
 (८) र य (१६) र पर + अ - १  
 (९) घर - ५ घ + ५ र (१७) ३ अघ - घर + १  
 (१०) मन + ४ न - ४ न (१८) ३ अ + ३ क - ३ ग  
 (११) घर + ३ म य  
 (१२) ३ अक ग - ३ अक - २ अ ग - १

॥ ५ अभ्यास के लिये गुणन संबंधी जो उदाहरण हैं उनके उत्तर नीचे लिखिए ॥

- | प्रश्न                        | उत्तर | प्रश्न                    | उत्तर |
|-------------------------------|-------|---------------------------|-------|
| (१) अक पर                     |       | (१३) रअ कर - को पर + क पर |       |
| (२) - ३ मन प                  |       | (१४) अक + कघ + अर + पर    |       |
| (३) ३ म + ३ न - ३ प           |       | (१४) ६ य - २ य - ४        |       |
| (४) अ प य + क प य             |       | (१५) घ - घ - १२           |       |
| (५) रअ घ + ४ अक व             |       | (१६) ६ अ - १ अ य + १०     |       |
| (६) ४ अ य - २ अ य र           |       | (१७) १ - य                |       |
| (७) - ३ पर + २ पर - ६ पर      |       | (१८) घ - ३ य + २ य        |       |
| (८) - ३ न + ६ न अ य - ८ न क य |       | (१९) २ अ य + २ क पर - अ य |       |
| (९) - ४ अक य + ६ अ म य        |       | र - कर                    |       |
| - १० क घ य                    |       | (२०) अ - अ य - ६ य        |       |
| (१०) १४ य र - २२ य            |       | (२१) ३ अ य - ३ अ य + ४    |       |
| (११) ४ अ य र ल + २ क य        |       | (२२) ८ अ पर - १२ कर       |       |
| र ल - २ ग य र ल               |       | - ६ अ य + ८ क पर          |       |

- (२३) रम+न-४मन-२षन (२८) अ<sup>४</sup> - १<sup>४</sup>  
 (२४) अग-अकग-अक (२९) य<sup>४</sup> - अ<sup>४</sup>  
 + क ग (३०) ङय + २<sup>४</sup>  
 (२५) य-र + २य + पर-३र (३१) १६ + ४य + य<sup>४</sup>  
 (२६) अक + कय-कर-अ (३२) अ<sup>४</sup> - ३अ य + २य<sup>४</sup>  
 र-यर + र (३३) य - ङ<sup>४</sup>  
 (२७) २अग-२अकग+क (३४) ४अ<sup>४</sup> य<sup>४</sup> - ङक<sup>४</sup> र<sup>४</sup>  
 ग + २अघ + अकघ (३५) ४अ<sup>४</sup> - ङअ<sup>४</sup> क<sup>४</sup> + ६अ<sup>४</sup>  
 क - क<sup>४</sup>

॥ ६ अभासके लिये भाग संबंधी जो उदाहरण हैं उनके उत्तर नीचे लिखे हैं

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	य	(१०)	२अयर	(१६)	य + १
(२)	७	(११)	-१४नय	(१७)	ग + घ
(३)	७ य	(१२)	२कय	(१८)	३-क
(४)	अ	(१३)	३ग-२कघ	(१९)	२अ-५य
(५)	३य	(१४)	२ग-कघ	(२०)	अ + २
(६)	अ	(१५)	-४य + ३र	(२१)	२अक
(७)	-अर	(१६)	१ + ङअक-२कग	(२२)	३य-५
(८)	-अर	(१७)	-२अय + ४क + १	(२३)	३य-य + ३
(९)	-३अ	(१८)	अ-५कय + ६य <sup>२</sup>	(२४)	अ-क-ग

- (२८) ५अ + ३य<sup>२</sup>  
 (२९) पद + ४पव + ३व<sup>२</sup>  
 (३०) अय-कय-अ य + अकय + अ-अक

(३९)  $१६ य^२ - २४ य^३ + ३६ य^४ - ५४ य^५ + ८१$

॥ ७ अभ्यास के लिये सम महत्तमापवर्तक सं  
बंधी जो प्रश्न हैं उनके उत्तर नीचे लिखे हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	४	(६)	अपय	(११)	अपर
(२)	२५	(७)	अकय	(१२)	$\frac{२}{५}$ अ
(३)	२०	(८)	३ अक	(१३)	घ
(४)	य	(९)	६ अकग	(१४)	य
(५)	कय	(१०)	७ मनप		

॥ लघुसमापवर्त संबंधी प्रश्नों के उत्तर  
नीचे लिखे हैं ॥

(१५)	१६८	(१८)	२५२०	(२३)	२४ ग
(१६)	२४०	(२०)	४२५०४	(२४)	अकग
(१७)	५६	(२१)	अकय	(२५)	२ य र
(१८)	१६८	(२२)	२अपर	(२६)	कग घ

॥ ८ अभ्यास के लिये भिन्न लघुतम रूप करने के  
जो उदाहरण हैं उनके उत्तर लिखते हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	$\frac{२अ}{३}$	(५)	$\frac{५य}{अ}$	(९)	$\frac{२अ+३}{क}$
(२)	२क	(६)	$\frac{२}{२कय}$	(१०)	$\frac{३क+१}{अ}$
(३)	$\frac{४कय}{३अ}$	(७)	$\frac{य-न}{अन}$	(११)	$\frac{३अ-२य}{२अ-३य}$
(४)	$\frac{कय}{२}$	(८)	$\frac{२य-३}{५}$	(१२)	$\frac{न-अ+प}{अ-न+प}$

॥ ८ अभ्यास के लिये भिन्न के जोड़ने और घटाने के उदाहरणों के उत्तर लिखते हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	$\frac{६५}{५}$	(१६)	$\frac{क ग य + अ ग र + अ क ल}{अ क ग}$
(२)	$\frac{५३ क}{६}$	(१७)	$\frac{अ य र + ग य र}{अ क ग}$
(३)	$\frac{३३ + १}{३}$	(१८)	०
(४)	$\frac{२३}{५}$	(१९)	$\frac{५}{२०}$
(५)	$\frac{६५ - ४}{७}$	(२०)	$\frac{५}{९}$
(६)	$\frac{१०५ - २}{११}$	(२१)	$\frac{२}{३}$
(७)	$\frac{१०}{३}$	(२२)	$\frac{५ + ५}{९}$
(८)	$\frac{अ क}{५ + २ + २ य र}$	(२३)	$\frac{५५ - २ - ३}{१०}$
(९)	$\frac{५ + २ + २ य र}{५ + २}$	(२४)	$\frac{४५ + १६}{अ + १}$
(१०)	$\frac{क ग + २ ग + ३}{अ क ग}$	(२५)	$\frac{२}{५}$
(११)	$\frac{१६५ - २३}{६}$	(२६)	$\frac{२५ + ५}{५ + ३५ + २}$
(१२)	$\frac{३४५ - २३}{१२}$	(२७)	$\frac{५५ + ३५}{४२}$
(१३)	$\frac{५४५ - १३}{५०}$	(२८)	$\frac{१७५ - ३४}{५०}$
(१४)	$\frac{६२}{१५५}$	(२९)	$\frac{अ ग य}{क + क ग य}$
(१५)	$\frac{५२}{२०२}$	(३०)	$\frac{५ + २}{५ + २}$
		(३१)	$\frac{१}{२ + ५ + २५}$
		(३२)	$\frac{५५२}{५५२}$

॥ १० अभ्यासके लिये भिन्नके गुणाभागके जो उदाहरण हैं उनके उत्तर नीचे लिखते हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	$\frac{३५}{२}$	(११)	$\frac{५}{२}$	(३७)	अ क
(२)	३५	(१२)	$\frac{३५}{२०}$	(३८)	$\frac{३-५}{३+५}$
(३)	$\frac{५५}{३}$	(१३)	$\frac{५}{८}$	(३९)	$\frac{३५+९}{५-२}$
(४)	२५	(१४)	$\frac{३५}{४२}$	(४०)	$\frac{३-३५+५}{५२}$
(५)	२५-२५	(१५)	$\frac{५}{५}$	(४१)	$\frac{३५-६५}{४-५}$
(६)	२८५	(१६)	$\frac{१-२२}{५}$	(४२)	$\frac{६-५}{४}$
(७)	८५	(१७)	$\frac{१+३५}{४}$	(४३)	$\frac{१}{१-५}$
(८)	८५-१५	(१८)	$\frac{५२}{२८}$	(४४)	$\frac{१}{५}$
(९)	६०+४५५	(१९)	$\frac{५२}{२८}$	(४५)	$\frac{३-३५}{५}$
(१०)	१६-१४५	(२०)	$\frac{५२}{२८}$		
(११)	७२५+१५६	(२१)	$\frac{३५}{५}$		
(१२)	४५-२	(२२)	$\frac{३५५}{५५}$		
(१३)	६५+८	(२३)	$\frac{३५५}{५५}$		
(१४)	३५-५	(२४)	$\frac{३५५}{५५}$		
(१५)	१०-५	(२५)	$\frac{३५५}{५५}$		
(१६)	$\frac{३५}{४}$	(२६)	$\frac{३५५}{५५}$		
(१७)	५	(२७)	$\frac{३५५}{५५}$		
(१८)	$\frac{३-३५}{५}$	(२८)	$\frac{३५५}{५५}$		
(१९)	$\frac{३५}{५}$	(२९)	$\frac{३५५}{५५}$		
(२०)	$\frac{३५}{५}$	(३०)	$\frac{३५५}{५५}$		

॥११ अभ्यास के लिये जो कोष्ठ संबंधी प्रश्न लिखे हैं उनको उत्तर नीचे लिखे हैं॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	अग	(८)	अ य + क य (१६)		$\frac{क}{ल}$
(२)	४-य	(९)	६-५ य		$\frac{२+य}{१-य}$
(३)	४ य	(१०)	१-य	(१७)	
(४)	२अ-२क	(११)	५अ-३ग	(१८)	२
(५)	७+५ य	(१२)	अ	(१९)	य + य
(६)	$\frac{३अ-२य}{२}$	(१३)	१-य	(२०)	४य-य <sup>४</sup>
(७)	क	(१४)	य		
		(१५)	$\frac{अ}{क}$		

॥१२ अभ्यास के लिये जो एक धात एक वर्ण समीकरण संबंधी उदाहरण लिखे हैं उनको उत्तर लिखे हैं

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	य = ६	(११)	व = ५	(२१)	य = ५
(२)	य = १	(१२)	य = १२	(२२)	य = ५
(३)	य = ६	(१३)	य = २	(२३)	य = ७
(४)	य = ८	(१४)	य = $\frac{१}{२}$	(२४)	य = ७
(५)	य = ३	(१५)	य = ४	(२५)	य = ७
(६)	य = ४	(१६)	य = २२	(२६)	य = १४
(७)	य = २	(१७)	य = ८	(२७)	य = ६०
(८)	य = १	(१८)	य = ७	(२८)	य = ८४
(९)	य = १०	(१९)	य = १०	(२९)	य = ३५
(१०)	य = ८	(२०)	य = ३०	(३०)	य = ५

(३२)  $y = 6$  (३३)  $y = 7$  (३४)  $y = 8$

(३५)  $y = 9$  (३६)  $y = 10$  (३७)  $y = 11$

॥१३॥ अभ्यास के लिये जोष्ट संबंधी सभी करण के जो  
उदाहरण लिखे हैं उन के उत्तर  
लिखते हैं

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	$y = 5$	(५)	$y = 7 \frac{1}{2}$	(९)	$y = 14$
(२)	$y = 6$	(६)	$y = 8 \frac{1}{2}$	(१०)	$y = 5$
(३)	$y = 7 \frac{1}{2}$	(७)	$y = 9$	(११)	$y = 6$
(४)	$y = 10$	(८)	$y = 7$	(१२)	$y = 8$

॥१४॥ अभ्यास के लिये विन संबंधी जो सभी करण ॥  
लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	$y = 7 \frac{1}{2}$	(४)	$y = 10$	(७)	$y = 5$
(२)	$y = 8 \frac{1}{2}$	(५)	$y = 5$	(८)	$y = 10$
(३)	$y = 9 \frac{1}{2}$	(६)	$y = 5$	(९)	$y = 7 \frac{1}{2}$
				(१०)	$y = 8$

॥१५॥ अभ्यास के लिये एक बात एक वर्ण सभी करण  
संबंधी जो प्रश्न लिखे हैं उन के  
उत्तर लिखते हैं

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	१६	(५)	१०
(२)	१५	(६)	१० और ३०
(३)	१८	(७)	१० और १४
(४)	१०	(८)	१ और ८



प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(८)	६॥, ५॥, ४॥, ३॥ (९)		$\frac{3}{4}$
(१०)	$५, ६, ३$ और $१२$ हाथ (१८)		२४०
(११)	१० अठ्ठानी और २० चौथानी	(२०)	२७ $\frac{3}{4}$ मिनट १ वजे पहिले
(१२)	८	(२१)	२७ $\frac{3}{4}$ मिनट ५ वजे उपरांत
(१३)	८ और ४०	(२२)	२ कोस
(१४)	२४ और ६ वजे	(२३)	२२, ७, १२ मन
(१५)	२५, ३६, और ७१		$\frac{3}{4}$ पाई
(१६)	४४ और ३६		और $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ पाई
(१७)	$\frac{3}{4}$		शुभ भवतु

इति बीज गणित प्रथम भागः समाप्तः

# ॥ हिन्दी बीज गणित ॥

दूसरा भाग

जिसको

पश्चिमोत्तरीय जिलों की पाठशालाओं के विद्यार्थियों के लिये पाण्डित मोहनलालने अंग्रेजी से

हिन्दी भाषा में उलथा किया

अवध देश के डैरेक्टर आफ़ पब्लिक

इन्स्ट्रक्शन श्रीयुत विलियम हेल्ड फ़ोर्ड साहिब बहा

दुर के हुकम से

स्थान लखनऊ

मतबद्ध मुन्शी नवल किशोर में छापा गया

सन् १८८५ ई०

॥ हिन्दी वीज गणित के दूसरे भाग का सूचीपत्र ॥

आशय	पृष्ठ संक्ति	
दो वर्ण एक घात समीकरण जिसमें दो दो अक्षर राशि मिली हों .....	१	३
क्रिया समेत दो वर्ण एक घात संबंधी प्रश्न .....	१३	२५
परीक्षा के लिये दो वर्ण एक घात संबंधी प्रश्न .....	२२	२४
घात क्रिया .....	२५	१३
क्रिया समेत घात क्रिया संबंधी प्रश्न .....	२८	८
परीक्षा के लिये घात क्रिया संबंधी प्रश्न .....	३०	४
मूल क्रिया .....	३०	२०
क्रिया समेत मूल क्रिया संबंधी प्रश्न .....	३१	१५
परीक्षा के लिये मूल क्रिया संबंधी प्रश्न .....	३७	५
वर्ग समीकरण .....	३७	२०
क्रिया समेत वर्ग समीकरण संबंधी प्रश्न .....	३८	२१
परीक्षा के लिये वर्ग समीकरण संबंधी प्रश्न .....	४०	६
संबन्ध १ अनुपात २ ध्रुव राशि ३ चल राशि ४ योगज श्रेढी और अन्तर श्रेढी .....	६५	११
प्रश्नोत्तर श्रेढी .....	७८	१६
क्रिया सहित श्रेढी संबंधी प्रश्न .....	८८	८
परीक्षा के लिये श्रेढी संबंधी प्रश्न .....	९५	११

# ॥ हिन्दी बीजगाणित ॥

॥ दूसरा भाग ॥

॥ दो वर्णों एक घात समीकरण ॥



५५ प्र० जो केवल एक समीकरण में दो अव्यक्त राशि य और र हों जैसे  $३य + २र = २०$  तो पक्षान्तरानयन से  $३य = २० - २र$  और ३ का भाग देने से  $य = \frac{२० - २र}{३}$  परन्तु इस समीकरण में य का मान व्यक्त नहीं है कारण यह है कि उसके मान के एक पद में र अव्यक्त राशि मिली है इसलिये जो एक और समीकरण हो जैसा  $३य + २र = २५$  और उसमें य और र राशियों के मान जो पूर्व समीकरण में हों रखने से उस समीकरण की समता बनी रहे तो

$$\therefore ३य + २र = २५$$

$$\therefore \text{पक्षान्तरानयन से } ३य = २५ - २र$$

$$३ \text{ का भाग देने से } य = \frac{२५ - २र}{३}$$

और पूर्व समीकरण में य का मान  $\frac{२० - २र}{३}$  निकाला है और दोनों समीकरण में य का एक ही मान कल्पना किया है इस कारण दोनों मान य राशि के तुल्य हैं वा  $\frac{२० - २र}{३} = \frac{२५ - २र}{३}$

इस समीकरणमें केवल एक ही य राशि अव्यक्त है समीकरण के दोनों पक्षों की राशियों को  $२ \times ३$  व  $३ \times २$  से गुणा किया जाये

$$६० - ६र = ५० - ४र$$

पश्चात्तरानयनसे  $६० - ५० = ६र - ४र$

$$\text{योग करने से } १० = २र$$

$$५ का भाग देने से  $२ = र$  वा  $२$$$

और पहले समीकरणमें  $य = १० - \frac{३र}{२}$  दूसरे में  $र$  का मान  $२$  रखने से

$$य = १० - \frac{३ \times २}{२} = १० - ३ = ७$$

इसलिये  $२य + ३र = २०$  और  $३य + २र = २५$  इन दोनों समीकरणों में  $य = ७$  और  $र = २$  इन मानों को दोनों

समीकरणों में  $य$  और  $र$  राशियों के स्थानमें रखने से उन्की समता बनी रहेगी जैसे पहले समीकरणमें

$$२ \times ७ + ३ \times २ = २० \text{ और दूसरे समीकरणमें}$$

$$३ \times ७ + २ \times २ = २५$$

जो दो समीकरणों में अव्यक्त राशियों के एक से मान हो तो उनको समान्यवर्ण समीकरण कहेंगे और दोनों समीकरणों को नीचे ऊपर लिख कर उनके दाहिनी ओर रोसा और कर देंगे और जो दो समीकरणों से एक रोसा समीकरण बनी है कि उसमें केवल एक अव्यक्त राशि रह जाती है तो जिस क्रिया से दूसरी अव्यक्त राशि मिट जाती है उसे एकवर्ण शोधन कहते हैं और जैसे पूर्व दो समीकरणों में एकवर्ण शोधन से  $य$  और  $र$  दोनों अव्यक्त राशियों के मान निकल आये हैं वैसे ही सरूप के जो कोई दो समीकरणों में और उनमें अनेक समीकरणों की समता अव्यक्त राशियों के एक से मान रखने से बनी रहे तो एकवर्ण

शोधन से दोनों अव्यक्त राशियों का मान निकल आयेगा परन्तु एक बराबरी शोधन की सुगम रीति बतलाते हैं। जैसे

॥ उदाहरण ॥

(१)  $२य + ३र = २०$  } इष्ट समीकरण हैं  
 और  $२य - ३र = ८$  }

ता तुल्य राशियों का योग करने से

$४य = २८ ∴ ४$  का भाग देने से  $य = \frac{२८}{४} = ७$

ऐसे ही तुल्य राशियों का अन्तर करने से

$६र = १२ ∴ ६$  का भाग देने से  $र = \frac{१२}{६} = २$

(२)  $२य + १र = १६$  } इष्ट समीकरण हैं इनमें य  
 और  $३य + २र = २५$  } और र राशियों का मान बतलाये

पहले समीकरण के प्रत्येक पद को २ से गुणा तो

$४य + २र = ३२$  इसके नीचे दूसरे समीकरण को लिखा

$३य + २र = २५$

अन्तर करने से  $य = ७$  और पहले समीकरण में य का मान

नयन से  $२य + १र = १६$

$= १६ - २ \times ७$

$= १६ - १४$

$= २$

(३)  $२य + ३र = २०$  } समीकरण हैं इनमें य और  
 $३य + २र = २५$  } र राशियों का मान बतलाओ

पहले समीकरण के प्रत्येक पद को २ से गुणा करो तो

$४य + ६र = ४०$  दूसरे समीकरण के प्रत्येक पद को ३

से गुणा करो तो  $६य + ६र = ७५$  इस समीकरण में से ऊपर

के समीकरण को घटाया तो  $५य = ३५$

इसलिये ५ का भाग देने से  $y = \frac{२५}{५} = ७$

और दूसरे समीकरण में यद्वान्तरा नयन से

$$२७ = २५ - ३y = २५ - ३ \times ७ = २५ - २१ = ४$$

इसलिये २ का भाग देने से  $r = \frac{४}{२} = २$

जिस रूप के ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं वैसे ही रूप के और जो दो भिन्न समीकरण हों वा ऐसे दो समीकरण हों कि जो उनपर पूर्व रीतियों से क्रिया करें तो उन के रूप ऊपर के उदाहरणों के समीकरणों के रूप के सम हो जाय तो जिन रीतियों से पूर्व उदाहरण के समीकरणों में य और र अव्यक्त राशियों का मान मिल गया है उन्हीं रीतों से इष्ट दो समीकरण में अव्यक्त राशि का मान निकल आवेगा उन रीतियों का यही आशय है कि इष्ट दो समीकरण से एक ऐसा समीकरण बनाना चाहिये जिसमें केवल एक राशि अव्यक्त रह जाय और दूसरी अव्यक्त राशि मिट जाय इसके लिये रीति लिखते हैं ॥

### ॥ रीति ॥

देखो कि दोनों समीकरण में किस अव्यक्त राशि के गुण छोटे हैं और जो य राशि के गुण छोटे हों तो य राशि का गुण जो एक समीकरण में हो उस से दूसरे समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा करो और ऐसे ही जो य राशि का गुण दूसरे समीकरण में हो उसे पहले समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा करो फिर देखो कि इस क्रिया करने से जो दो नये समीकरण उत्पन्न हों उन का योग वा अन्तर करने से य राशि मिट जायगी और

एक ऐसा समीकरण रह जायगा कि उसमें केवल २ अक्षर व्यक्त राशि रहेंगी और जो २ राशिके गुण होते हैं तो पूर्व क्रिया से २ राशि को शोधन करो और जिस अव्यक्त राशि के गुण छोटे होते हैं उनसे दोनों समीकरण को हथक २ गुणते है इसका यह कारण है कि इस रीति से बोड़ा गुणा कर ना पडता है ॥

॥ उदाहरण ॥

$$\left. \begin{array}{l} (१) \quad २य + १६र = ४८ \\ \text{और} \quad ५य - १३र = ६७ \end{array} \right\} \text{तो य और र का मान द०}$$

पहले समीकरण प्रत्येक पद को ५ से गुणा करो और दूसरे समीकरण प्रत्येक पद को २ से गुणा करो तो

$$\begin{aligned} १०य + ८०र &= २४० \\ \text{और} \quad १०य - २६र &= १३४ \\ \text{अन्तर करनेसे} \quad १०६र &= १०६ \\ \therefore र &= १ \end{aligned}$$

और पहले समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$$२य = ४८ - १६य = ४८ - १६ \times १ = ४८ - १६ = ३२$$

$$२ \text{ का भाग देने से } य = १६$$

य और र अव्यक्त राशियों के मानों की सत्यता देखने के लिये उन्हें पूर्व समीकरणों में रक्वा तो

$$२य + १६र = २ \times १६ + १६ \times १ = ३२ + १६ = ४८$$

$$\text{और} \quad ५य - १३र = ५ \times १६ - १३ \times १ = ८० - १३ = ६७$$

$$\left. \begin{array}{l} (२) \quad ७य - ८र = ३ \\ \text{और} \quad १३य + ५र = ८५ \end{array} \right\} \text{तो य और र का मान बताओ}$$

इन समीकरणों में २ राशि के गुण होते हैं इसलिये प



हले समीकरण को दूसरे समीकरण की र राशि के गुण  
 ५ से गुना और दूसरे समीकरण को पहले समीकरण की  
 र राशि के गुण ८ से गुना तो

$$३५य - ४०र = १५$$

$$\text{और } २०४य + ४०र = ६८०$$

$$\text{योग करने से } १३९य = ६९५$$

$$१३९ का भाग देने से य = \frac{६९५}{१३९} = ५$$

$$\text{और पहले समीकरण में } ८र = ७य - ३$$

$$\text{पक्षान्तरानयन से } = ७ \times ५ - ३$$

$$= ३५ - ३$$

$$= ३२$$

$$\text{इसलिये } ८ \text{ का भाग देने से } र = \frac{३२}{८} = ४$$

य और र अव्यक्त राशियों के मान जो निकले हैं उनकी  
 सत्यता देखने के लिये परीक्षा करते हैं ॥

$$७य - ८र = ७ \times ५ - ८ \times ४ = ३५ - ३२ = ३$$

$$\text{और } १३य + ५र = १३ \times ५ + ५ \times ४ = ६५ + २० = ८५$$

जो समीकरणों में अव्यक्त राशियों के गुण बड़े अंक हों  
 तो अव्यक्त राशियों के मान सुगम रीति से निकालना  
 वतलाते हैं ॥ जैसे

### ॥ उदाहरण ॥

(१)  $२६य + २३र = २४$  } तो य और र का मा  
 और  $१४य - १२र = १८$  } न चतान्त्रो

२६ और १४ का १२२ लघु समापवर्त्य है और इसमें १६ पूरा  
 ७ बार जाता है और २४ पूरा ८ बार जाता है तो पहले समी  
 करण को ७ से गुना और दूसरे समीकरण को ८ से गुना

$$\text{इसलिये } १२२य + २६१र = ६५८$$

$$१२२य - २६१र = १४४$$

अन्तर करनेसे  $२५७र = ५१४$

$२५७$  का भाग देनेसे  $र = \frac{५१४}{२५७} = २$

और दूसरे समीकरण में पक्षांतरानयन से

$$१४य = १२२ + १८ = १२ \times २ + १८ = २४ + १८ = ४२$$

$१४$  का भाग देनेसे  $य = \frac{४२}{१४} = ३$

(२)  $५४य - १२१र = १५$  }  $य$  और  $र$  का मान  
 और  $३६य - ७७र = २१$  } न बताओ

$५४$  और  $३६$  का  $२१६$  लघु समापवर्त्य है और इसमें

$५४$  का पूरा  $४$  बार भाग लगता है और  $३६$  का पूरा  $६$

बार भाग लगता है इसलिये पहले समीकरण को  $४$  से

गुणा किया और दूसरे समीकरण को  $६$  से गुणा किया तो

$$२१६य - ४८४र = ६०$$

$$२१६य - ४६२र = १२६$$

अन्तर करनेसे  $२२र = ६६$

$२२$  का भाग देनेसे  $र = \frac{६६}{२२} = ३$

और दूसरे समीकरण में पक्षांतरानयन से

$$३६य = २१ + ७७र = २१ + ७७ \times ३ = २१ + २३१ = २५२$$

$३६$  का भाग देनेसे  $य = \frac{२५२}{३६} = ७$

### ॥ प्रश्न १ ॥

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उनमें  $य$  और  $र$  का मान बताओ

$$\left. \begin{array}{l} (१) \quad य + र = १७ \\ \quad २य - र = १६ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} (२) \quad ४य - ७र = २६ \\ \quad ४य + ५र = ५० \end{array} \right\}$$

- |                        |   |                        |   |
|------------------------|---|------------------------|---|
| (३) $५य + २र = ३२$     | } | (४) $३च - ७र = २$      | } |
| $३च - २र = १४$         |   | $११र - ३य = २$         |   |
| (५) $३य + ४र = ११$     | } | (६) $१३य - ६र = ३१$    | } |
| $१५य - २र = ११$        |   | $११य - ३र = ४७$        |   |
| (७) $७य - ६र = १०$     | } | (८) $३५य + २र = ७६$    | } |
| $६य - ७र = ३$          |   | $१२र - य = ३४$         |   |
| (९) $५य + २र = १६$     | } | (१०) $११य - ७र = ७२$   | } |
| $४र + २य = ३२$         |   | $७य - ११र = ०$         |   |
| (११) $३६य - ५५र = ०$   | } | (१२) $६य + ५र = ६५$    | } |
| $२य + ५र = १३$         |   | $७य - २३र = २५$        |   |
| (१३) $१५य - २ = १४३$   | } | (१४) $११य - १३र = १६$  | } |
| $३५र + य = २५५$        |   | $२०य - १६र = ४३$       |   |
| (१५) $४५य + ८र = ३५०$  | } | (१६) $१०१य - ३४र = ६३$ | } |
| $२१र - १३य = १३२$      |   | $१७३य + २८र = २६$      |   |
| (१७) $६४य + ६०र = २३७$ | } | (१८) $३३य - ४३र = १२$  | } |
| $६३य - २१र = ८०$       |   | $७य + ६र = ६०$         |   |
| (१९) $२६य + ३३र = ४८$  | } | (२०) $४६य - ३३र = ६$   | } |
| $४६य + २०र = १२६$      |   | $३य - ६र = २$          |   |

५६ प० जिन समीकरणों में अव्यक्त राशिकां मान निकालना हो तो जो रूप कि पूर्व उदाहरणों में समीकरणों का लिखा है उसके समान रूप इष्ट समीकरणों का करलो । जैसे

**॥ उदाहरण ॥**

(१)  $२(य+२) = ३(य-२) + १०$  } य और र का मान बता०  
 और  $२य-२ = ४(२र-य) + ३$  }

पहले समीकरण में गुणा करने के पीछे कोष्ठ हटाने से

$$२य + ३र = ३य - ३र + १०$$

पक्षान्तरानयन से  $५र - य = १०$  यह पहले समीकरण का लघुतम रूप हुआ ॥

दूसरे समीकरण में कोष्ठ दूर करने से

$$२य - र = ८र - ४य + ३$$

पक्षान्तरानयन से  $६य - ६र = ३$

३का भाग देने से  $२य - ३र = १$  यह दूसरे समीकरण का लघुतम रूप हुआ ॥

इसलिये दोनों लघुतम रूप समीकरणों का लिखा तो

$$५र - य = १०$$

$$\text{और } २य - ३र = १$$

इन में पहले समीकरण को २ से गुणा करो तो

$$१०र - २य = २०$$

और दूसरे समीकरण को रखवा  $२य - ३र = १$

$$\text{योग करने से } ७र = २१$$

$$७का भाग देने से  $र = \frac{२१}{७} = ३$$$

और पहले लघुतम रूप समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$$य = ५र - १० = ५ \times ३ - १० = १५ - १० = ५$$

$$(१) \frac{२य - र + ६}{३} = \frac{२र - य + ६}{२} \quad \left. \begin{array}{l} \text{य और र का} \\ \text{मान ज्ञात हो} \end{array} \right\}$$

$$\text{और } \frac{३य + र}{५} + १ = \frac{३र + य + १३}{१०}$$

छद्म गम के अर्थ पहले समीकरण को ६ से गुणा करो

$$\text{तो } ४य - ३र + ३६ = ६र - ३य + २७$$

पक्षांतरानयन से  $४य + ३य - ३र - ६र = २७ - ३६$

योग करने से  $७य - ८र = -६$  यह पहले समीकरण का लघुतम रूप हुआ ॥

द्विद गमके अर्थ दूसरे समीकरण को १० से गुणा करे तो

$$६य + २र + १० = ३र + ५ + १३$$

पक्षान्तरानयन और योग करने से  $५य - २र = ३$  यह दूसरे समीकरण का लघुतम रूप हुआ ॥

दोनों लघुतम रूप समीकरणों को एक स्थान में इकट्ठा रकवा

$$\left. \begin{array}{l} ७य - ८र = -६ \\ \text{और } ५य - २र = ३ \end{array} \right\}$$

इन में पिछले समीकरण को ८ से गुणा तो

$$५०य - ८र = २४$$

और पहले समीकरण को रकवा

$$७य - ८र = -६$$

अन्तर करने से  $३३य = ३३$

$३३$  का भाग देने से  $य = \frac{३३}{३३} = १$

और दूसरे समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$$र = ५य - ३ = ५ \times १ - ३ = ५ - ३ = २$$

$$\frac{७य - ८र}{२} + ३ = \frac{२य + २}{५}$$

और  $\frac{७य - ८र}{२} = \frac{२य + २}{५} - ३$

य और र का मान बताओ

द्विद गमके लिये पहले समीकरण को १० से गुणा किया तो

$$१५य - २५र + ३० = ४य + ३र$$

पक्षान्तरानयन और योग करनेसे

$११य - २७र = -३०$  प्रथम लघुतम रूप समीकरणा हुआ  
 द्वेदगमके लिये दूसरे समीकरणको १२से गुणा किया तो  
 $११६ - ३ + ६२ = ६ + ४२$  पक्षान्तरानयन और योग कर  
 ने से  $११६ = ४९ - २२$  दूसरा लघुतम रूप समीकरण हु  
 आ ॥

प्रथम लघुतम रूप समीकरण को ११से गुणा किया तो

$$११६य - २४३र = -३३०$$

दूसरे लघुतम रूप समीकरण को ११से गुणा किया तो

$$११६य - २२६ - १०५६$$

अन्तर करनेसे  $२२१र = १३२६$

२२१ का भाग देनेसे

$$र = \frac{१३२६}{२२१} = ६$$

दूसरे लघुतम रूप समीकरणमें पक्षान्तरानयनसे

$$११य = ११६ + २२ = १३८ + २ \times ६ = १३८ + १२ = १५०$$

६ का भाग देनेसे

$$य = \frac{१५०}{६} = २५$$

### ॥ १ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उनमें य और र अथवा क र  
 शियों का मान निकालो

$$\left. \begin{aligned} (१) \quad ३(६य - ५र) &= २(य + र) + ३ \\ ४(३य - २र) &= ५(य - र) + ११ \end{aligned} \right\}$$

$$३य + ३ = ३६$$

$$(२) \quad \frac{६र - २य}{४} = ८$$

$$(३) \quad \frac{३य-२र}{२} - ३ = \frac{२य-२}{४}$$

$$\frac{५य-४र}{२} - ३ = \frac{४य-३र}{३}$$

$$(४) \quad \frac{२य-३}{२} + र = ७$$

$$५य-१३र = ३३ \frac{१}{२}$$

$$(५) \quad \frac{य+३}{२} = \frac{१}{३}$$

$$\frac{य}{२-१} = \frac{१}{५}$$

$$(६) \quad \frac{य}{४} + \frac{र}{४} = ४३$$

$$\frac{य}{४} + \frac{र}{४} = ४३$$

$$(७) \quad \frac{य}{४} + \frac{र}{१२} = २६$$

$$\frac{३य}{१२} + \frac{३र}{१२} = ४६$$

$$(८) \quad \frac{१}{२}(य+२) = \frac{१}{३}(२य+४)$$

$$\frac{१}{३}(य-२) = \frac{१}{२}(य-२४)$$

(१८)  $\frac{१}{७}(य+२) + \frac{१}{४}(२-य) = २य-८$

$\frac{१}{७}(२२-३य) + \frac{१}{४}(८य+६-४)२य+४$

(१९)  $\frac{१}{७}(३य-७२) = \frac{१}{४}(२य+२+१)$

$८ - \frac{१}{४}(य-२) = ६$

(२०)  $\frac{य-२}{५} = \frac{१०-य}{३} = \frac{२-२०}{४}$

$\frac{२२+४}{७} = \frac{२य+२}{८} = \frac{य+२३}{४}$

(२१)  $\frac{२य+२}{४} + \frac{७२+६य+१९}{१८} = \frac{२१}{३} - \frac{५य-१७}{६}$

$\frac{३}{७}(५य+३२+२) = \frac{४}{३} - (६२+६)$

॥ दो वर्ग एक घात समीकरण सम्बन्धी प्रश्न।  
 (१) दो संख्याओं का योग २६ है और जो बड़ी संख्या के आधे में छोटी संख्या का तृतीयांश जोड़ा जाय तो योग ११ के तुल्य होता है तो बतलाओ कि वे कौनसी २ संख्या हैं ॥

कल्पना करो कि य और २ इष्ट राशि हैं तो प्रश्न के अनुसार  $य + २ = २६$  और कल्पना करो य राशि बड़ी है तो इसका आधा  $\frac{५}{२}$  हुआ और दूसरी राशि का तृतीयांश  $\frac{२}{३}$  हुआ इसलिये प्रश्न के



$$\text{अनुसार } \frac{y}{3} + \frac{r}{3} = ११$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{तो } y + r = ३३ \\ \frac{y}{3} + \frac{r}{3} = ११ \end{array} \right\}$$

इन दो समीकरणों से  $y$  और  $r$  अव्यक्त राशियों का मान निकालने से प्रश्न का उत्तर निकल आवेगा ॥

दूसरे समीकरण को ३ से गुणा करो तो  $३y + ३r = ६६$   
पहले समीकरण को २ से गुणा करो तो  $२y + २r = ५२$

$$\text{अंतर करने से } y = १४$$

और पहले समीकरण में प्रक्षान्तरा नयन से  
 $r = ३३ - y = ३३ - १४ = १९$  इसलिये १४ और १९  
दृष्ट संख्या हुई

इन की सत्यता दिखाते हैं  $१४ + १९ = ३३$   
 $\frac{१४}{३} + \frac{१९}{३} = ७ + ६ = ११$

इस प्रश्न के उत्तर निकालने में  $y$  और  $r$  दो अव्यक्त राशियों से दो समीकरण बनाने की कुछ आवश्यकता नहीं है केवल एक वर्ण समीकरण के एक एक करण से प्रश्न का उत्तर निकल आवेगा ॥

कल्पना करो कि दृष्ट संख्याओं में  $y$  संख्या बड़ी है तो प्रश्न के अनुसार  $३३ - y$  दूसरी संख्या छोटी और  $\frac{y}{३}$  बड़ी राशि का आधा हुआ और  $\frac{३३ - y}{३}$  यह छोटी राशि का दूनी यांश हुआ इसलिये प्रश्न के अनुसार  $\frac{y}{३} + \frac{३३ - y}{३} = ११$  यह एक घात एक वर्ण समीकरण है ॥

६ से गुणा किया तो  $३५ + ५२ - २५ = ६२$

पक्षान्तरानयन और योग करने से  $५ = १५$  यह संख्या हुई  
और  $२६ - १४ = १२$  यह दूसरी संख्या हुई

(२) मेरे पास आने और पाइयां मिलकर १॥- ) के समान हैं और जो मेरे पास जितने आने हैं उतनी पाइयां होतीं और जितनी मेरे पास पाइयां हैं उतने आने होते तो मेरे पास आने और पाइयां मिलकर ॥३=) के समान होते तो बतलाओ कि मेरे पास कितने आने हैं और कितनी पाइयां ॥

कल्पना करो कि य आने की संख्या है  
और पाइयां की संख्या है  
तो म आने = १२५ पाइयां  
और १॥- ) = ३०० पाइयां

इस लिये प्रश्न के अनुसार  $१२५ + २ = ३००$  प्रथम समीकरण  
र आने = १२२ पाइयां  
॥३=) = १६६ पाइयां

इस लिये प्रश्न के अनुसार  $१२२ + ५ = १६६$   
प्रथम समीकरण को १२ से गुणा किया तो  $१४६५ + १२२ = ३६००$   
इस समीकरण में से इस के ऊपर जो समीकरण लिखा है  
उसे घराया तो

$$१४३५ = ३४३२$$

$$१४३ का भाग देने से  $५ = \frac{३४३२}{१४३}$ 

$$= २४$$

यह आने की संख्या हुई$$

और प्रथम समीकरण में पक्षान्तरानयन  
हैर =  $३०० - १२५ = ३०० - १२५ = १७५$

$= 300 - 277 = 23$  यह

पाइयों की संख्या हुई।

अब देखो कि अव्यक्त राशियों का मान ठीक है वानहीं

क्योंकि २२ पाइयां = १ आना

और २४ आने = २ रुपया और ८ आने

इस लिये सर्व धन = १ रुपया और ८ आने

और २४ पाइयां = २ आने

और १२ आने = १२ आने

इस लिये दोनों मिलकर = २४ आने

(३) ७ वर्ष आगे पिता की अवस्था लड़के की अवस्था से ४ गुनी थी परंतु ७ वर्ष उपरान्त पिता की अवस्था लड़के की अवस्था से दूनी रह जायगी तो बतलाओ कि हाल में हर एक मनुष्य की क्या अवस्था है ॥

कल्पना करो कि य लड़के की अवस्था है ॥

और २ बाप की अवस्था है

तो य-७ = लड़के की अवस्था ७ वर्ष पहले

२-७ = बाप की अवस्था ७ वर्ष पहले

य+७ = लड़के की अवस्था ७ वर्ष पीछे

२+७ = बाप की अवस्था ७ वर्ष पीछे

प्रश्न के अनुसार  $२-७ = ४य-७$  } इन सभी करणों से य और

और  $२+७ = २(य+७)$  } २ का मान निकालो

कोष्ठ को दूर करने से  $२-७ = ४य-२०$

और  $२+७ = २य+१४$

अन्तर करने से  $-२४ = २य-४२$

पक्षान्तरानयन से  $२य = ४२-२४ = २८$

२ का भाग देने से  $y = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$  यह लड़के की अवस्था है और पहले समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$$x = 7 + 8(y - 7) = 7 + 8(12\frac{1}{2} - 7) = 7 + 8 \times 5\frac{1}{2} =$$

$$7 + 44 = 51 \text{ इस लिये } 51 \text{ वर्ष की अवस्था बाप की हुई}$$

(४) मेरे पास दुपट्टे में रुपये और चौ अन्नियां बंधी हैं और जितने मेरे पास रुपये हैं उन से जो दूने मेरे पास रुपये होते और जितनी चौअन्नियां हैं उन से आधी चौअन्नियां होती तो मेरे पास  $24\frac{1}{2}$  रुपये सर्व धन होता परंतु जितने मेरे पास रुपये हैं उन से आधे रुपये होते और जितनी चौअन्नियां हैं उन से दो गुनी चौअन्नियां होती तो मेरे पास ७ सर्व धन होता तो बतलाओ कि मेरे पास कितने रुपये हैं और कितनी चौअन्नियां।

कल्पना करो कि मेरे पास  $x$  रुपये हैं

और  $r$  चौअन्नियां हैं

तो  $2x$  रुपये =  $8 \times 2x$  चौअन्नियां

$$= 16x \text{ चौअन्नियां}$$

और  $\frac{r}{2}$  चौअन्नियां =  $\frac{r}{2}$  चौअन्नियां

और  $24\frac{1}{2}$  रुपये =  $8 \times 24\frac{1}{2}$  चौअन्नियां

$$= 196 \text{ चौअन्नियां}$$

इस लिये प्रश्न के अनुसार  $16x + \frac{r}{2} = 196$

इसे गुणा करने से  $32x + r = 392$  प्रथम समीकरण

$\frac{r}{2}$  रुपये =  $8 \times \frac{r}{2}$  चौअन्नियां =  $4r$  चौअन्नियां

और  $2r$  चौअन्नियां =  $2r$  चौअन्नियां

और ७ रुपये =  $8 \times 7$  वा  $56$  चौअन्नियां

इस प्रश्न के अनुसार  $2x + 2r = 56$  ॥

२ का भाग देने से  $y + २ = १४$  दूसरा समीकरण  
और प्रथम समीकरण में  $२६ y + २ = २६४$

घटाने से  $१५ y = २६०$

$१५$  का भाग देने से  $y = \frac{२६०}{१५} = १२$  यह रूपों की संख्या है

और दूसरे समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$x = २४ - y = २४ - १२ = १२$  यह चैत्रानियों की संख्या हुई ॥

(५) एक कुंजड़ने सन्तरे मोल लिये और उन के जबदा  
म चुकाये तो उसने बराबर रुपये और बराबर आने दिये  
और जितने रुपये और जितने आने दिये उन दोनों संख्या  
ओं के योग के समान कोड़ी सन्तरे खरीदे तो बतलाओ कि  
एक कोड़ी सन्तरे के क्या दाम हुए ॥

कल्पना करो कि उसने १ कोड़ी सन्तरे मोल लिये तो प्रश्न के अ  
नुसार कोड़ी की संख्या १ के दो तुल्य खंड या  $\frac{१}{२}$  और  $\frac{१}{२}$  रुपये  
और आने की संख्या होगी क्योंकि  $\frac{१}{२} + \frac{१}{२} = १$  और  $\frac{१}{२}$  रुप  
या = ८ आने और  $\frac{१}{२}$  आना = ६ पाई इस कारण १ कोड़ी स  
न्तरे के दाम  $८ \frac{१}{२}$  आने वा ८ आने और ६ पाई हुई ॥

### ॥ दूसरी रीति से ॥

कल्पना करो कि १ कोड़ी के दाम य आने हैं और सन्तरे  
के दाम में उसने जितने रुपये दिये उन की संख्या  $x$  है और  
जितने आने दिये उन की भी संख्या  $x$  है तो प्रश्न के अनुसार  
उसने  $२x$  कोड़ी सन्तरे खरीदे होंगे और २ कोड़ी सन्तरे के  
दाम य आने माने हैं इस लिये  $२x$  कोड़ी सन्तरे के दाम  $२x$   
य वा  $२x$  आने होंगे परंतु प्रश्न के अनुसार सब सन्तरे के  
मोल १ रुपये और  $x$  आने हैं और  $x$  रुपये =  $१६x$  आने इ  
स लिये  $x$  रुपये +  $x$  आने =  $१६x$  आने +  $x$  आने =  $१७x$  आने

परंतु सन्तरो का एक ही मोल होगा इस कारण

$$२ यर = १७र$$

३र का भाग देने से  $y = \frac{१७र}{३र} = \frac{१७}{३} = ५\frac{२}{३}$  आने = ५ आने और ६ पाई ॥

यह २ कोड़ी सन्तरो के दाम हूँ ॥

इस उदाहरण से यह जान पड़ा कि ऐसे प्रश्नों में जो अव्यक्त राशि कल्पना करने से एक अव्यक्त राशि का मान सहज में निकल आवेगा और ऊपर के उदाहरण में दो बल एक ही समीकरण बना और दूसरी अव्यक्त राशि भाग देने से समीकरण में से निकल गई ॥

### ॥ तीसरी रीति ॥

कल्पना करो कि एक कोड़ी सन्तरो के य आने दाम हैं और य रुपये और यही आने सब सन्तरो के दाम हैं वा सन्तरो के दाम = य रुपये + य आने ॥

$$= १६ य आने + य आने।$$

$$= १७ य आने।$$

और प्रश्न के अनुसार य + य वा २ य सन्तरो की कोड़ियों की संख्या हुई ॥

### ॥ त्रैराशिक से ॥

य कोड़ी सन्तरो: १७ य आने: २ कोड़ी सन्तरो: १७ य और  $\frac{१७ य}{३ य} = \frac{१७}{३} = ५\frac{२}{३}$  आने से एक कोड़ी सन्तरो के दाम हूँ ॥

(६) एक ऐसा भिन्न है कि जो उस के अंश में १ जोड़ देने के भिन्न का मान १ होगा और जो हमें २ जोड़े दो तो भिन्न ३ के तुल्य होगा तो बतलाओ कि वह कौन सा भिन्न है कल्पना करो कि  $\frac{y}{x}$  इह भिन्न है इस के अंश में १ जोड़ दिया तो  $\frac{y+१}{x}$

यह भिन्न का रूप होगया ॥

और प्रश्न के अनुसार  $\frac{y+2}{2} = 2$  ॥

२ से गुणा करने से  $y+2=4$  प्रथम समीकरण  $\frac{y}{2}$  भिन्न के हर में २ जोड़ा तो  $\frac{y}{2+2}$  यह भिन्न का रूप होगया। प्रश्न के अनुसार  $\frac{y}{2+2} = \frac{2}{2}$  ॥

२ (२+२) से गुणा किया तो  $2y=4+2$  दूसरा समीकरण परंतु प्रथम समीकरण में  $2=y+2$  इस लिये २ के इस मान की दूसरे समीकरण में स्थापन किया ॥

तो  $2y=y+2+2=y+4$  शोधन करने से

$$y=4 \text{ और } 2=y+2=4+2=6$$

इस लिये  $\frac{y}{2} = \frac{4}{2}$  यह इष्ट भिन्न हुआ।

(७) दो अंकों की एक ऐसी संख्या है कि वह दोनों अंकों के योग से ४ गुनी है और जो उन दोनों अंकों की स्थान बदलकर रखी तो यह जो संख्या बनेगी वह पूर्वद्वी संख्या से १२ के स्थान छोटी होगी तो बताओ कि पहली कौन सी संख्या है ॥

कल्पना करो कि इष्ट संख्या का यदस स्थानीय अंक है और र एक स्थानीय अंक है

तो जैसे  $23=20+3$  वैसे ही  $10y+r$  इष्ट संख्या है।

इस लिये प्रश्न के अनुसार  $10y+r=4(y+r)$

$$=4y+4r$$

यसान्तरानयन से  $10y-4y=4r-r$

योग करने से  $6y=3r$

३ रू भाग देने से  $2y=r$  प्रथम समीकरण

और जो अंकों को बदलकर रखने वा  $10r+y$  वह दूसरी संख्या है

$$\begin{aligned} \text{प्रथम के अनुसार } १०२ + २ &= २(१०२ + २) - १२ \\ &= २०४ + ४ - १२ \end{aligned}$$

पश्चात्तरानयन और योग करनेसे  $१९६ - ८२ = ११४$

प्रथम समीकरण में  $२ = २४$  ;  $— ८२ = — ११४$

इस मान को ऊपर के समीकरण में रक्वा तो

$$१९६ - ११४ = ८२$$

$$\text{योग करनेसे } ३४ = ८२$$

इका भाग देने से  $४ = २४$  और  $२ = २४ = २ \times ४ = ८$  इस लिये ४८ इष्ट संख्या हुई ॥

(८) शाहजहाँपुर में एक बज़ाज़ने १० रुपये की रुई लेकर उसे बहुत अच्छी बुनकरवा के बहुत महीन कतवाड़े और आधे सूत की तो बड़े मोल के चिल्ले लगवा कर सुगढ़ पगड़ियां बुनवाई और आधे सूत की बारीक मलमल बुन कर इस सब माल को अंकवाया तो ४४४ रुपयों का ठहरा और दूसरे बज़ाज़ने भी १० ही रुपयों की रुई मोल लेकर अच्छा सूत कतवाकर तिहाई के सूत की तो मलमल बुनवाई और दो तिहाई सूत की कीमती पगड़ियां तो इसने जब अपना माल अंकवाया तो पहले बज़ाज़ के माल के दामों से ३० रुपये बढ़ती का ठहरा तो अब बतलाओ कि एक रुपये की रुई जो पगड़ियों में लगी होगी सब लागत और नफ़ा मिलकर उस के अब कितने दाम हो गये ॥ और १ रुपये की रुई जो मलमल बुनाने में लगी होगी उसके कितने दाम हो गये ॥

कल्पना करो कि १ रुपये की रुई जो पगड़ियों में लगी हो उसमें सब लागत और नफ़ा गिनकर उसके दाम



य रुपये हो गये और १ रुपये की रुई जो मलमल में लगी हो उसमें सब लागत और नफ़ा गिनकर उस के दाम र रुपये हो गये ॥

तो प्रश्न के अनुसार पहले बज़ाज़ ने तो ५) की रुई की तो पगड़ियां बुनवाईं और ५) की रुई की मलमल और सब मिलाकर ४४४) का अंका ॥ ना

$५य + ५र = ४४४$  प्रथम समीकरण और दूसरे बज़ाज़ ने १०) की रुई की तिहाई वाई रुपये की रुई की मलमल बुनवाईं और १०) की रुई की दो तिहाई वाई रुपये की रुई की पगड़ियां बुनवाईं ॥

इस लिये प्रश्न के अनुसार

$$\frac{२०}{३}य + \frac{१०}{३}र = ४४४ + ३०$$

३ का गुणा करने से  $२०य + १०र = १३३२$  दूसरा समीकरण

प्रथम समीकरण के २ से गुणा तो  $१०य + २०र = ८८८$

इस दूसरे समीकरण में से घटाया तो  $१०य = ५३४$

१० का भाग देने से  $य = ५३ \frac{३}{५} = ५३।६$  पाई ॥

पहले समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$$५र = ४४४ - ५य = ४४४ - ५ \times ५३ \frac{३}{५} = ४४४$$

$$- २६७ = १७७$$

५ का भाग देने से  $र = \frac{१७७}{५} = ३५ \frac{२}{५} = ३५।४$  पाई ॥

॥ अब इन मानों की सत्यता दिखाते हैं ॥

$$\begin{aligned} ५र + ५य &= ५ \times ३५ \frac{२}{५} + ५ \times ५३ \frac{३}{५} = १७७ + २६७ \\ &= ४४४ \text{ रुपये ॥} \end{aligned}$$

॥ ३ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

(१) गुलाब ने शिबदीन से कहा कि जो तुम चमे

अपनी १० गोलियां दे दो तो मेरे पास तुमसे दो गुनी गोलियां हो जाय और शिवदीनने गुलाब से कहा कि जो तुम मुझे अपनी १० गोलियां दे दो तो मेरे पास तुमसे तीन गुनी गोलियां हो जाय तो बतलाओ कि हर एक मनुष्य के पास कितनी २ गोलियां हैं ॥

(२) एक मनुष्य के पास दो बटुओं में रुपये हैं और जब उसने १० रुपयों में से ५ एक बटुवे में रख दिये और ५ दूसरे बटुवे में रखे तो पहले बटुवे के रुपये दूसरे बटुवे के रुपयों से दूने होगये परंतु जो वह हस्तों रुपये पहले बटुवे में रख देता तो उसमें के रुपये दूसरे बटुवे के रुपयों से तीन गुने हो जाते तो बतलाओ कि हर एक बटुवे में कितने रुपये होंगे ॥

(३) ११ मनुष्यों में ६ पुरुष और ५ स्त्री हों इस परिमाण से एक मण्डली में पुरुष और स्त्रियां हैं परंतु उनमें से २ पुरुष जाते रहे और दो स्त्रियां और भागई तो बतलाओ कि पुरुष और स्त्रियां बराबर हो गई अब उस मण्डली में कितने पुरुष और कितनी स्त्रियां थीं ॥

(४) एक दयावान मनुष्य ने ६॥३ को कंगले पुरुष और विधवाओं में बांटने का विचार किया और जब उसने हिसाब लगाया तो मालूम हुआ कि जो वह हर एक पुरुष और विधवा को तीन २ आने दे तो उस के पास सब पुन्यार्थ रुपये और आनों में से १ आना बच रहेगा और जो वह हर एक पुरुष को ३ २ पाई दे और हर एक विधवा को ३ १ पाई दे तो उस के पास बांट के ६ पाई बच रहेंगी तो बतलाओ कि कितने कंगले पुरुष थे और

कितनी विधवा थी ॥

(५) एक ऐसा भिन्न है कि जो उसके अंश और हर दोनों में से १ घटावे तो भिन्न का मान  $\frac{2}{3}$  हो जायगा और जो अंश में से २ घटावे और हर में २ जोड़ दे तो भिन्न का मान  $\frac{1}{3}$  हो जायगा तो बतलाओ कि कौन सा भिन्न है

(६) ऐसा कौन सा भिन्न है कि उसके अंश और हर का दूना योग उनके तिगुने अन्तर के तुल्य हो ॥

(७) ऐसी दो संख्या कौन सी हैं कि उन में एक संख्या जितनी २० से अधिक है उतनी ही दूसरी संख्या २० से छोटी है और उन दोनों संख्याओं का दशांश योग उनके चतुर्थांश अन्तर की तुल्य है तो बतलाओ कि वे संख्या कौन सी हैं ॥

(८) ऐसी दो संख्या कौन सी हैं कि जो एक संख्या के आधे में दूसरी संख्या का तिहाई जोड़े तो योग १२ के तुल्य हो जाय परन्तु जो पहली संख्या की तिहाई में दूसरी संख्या का आधा जोड़ दे तो योग २३ के तुल्य हो जाय ॥

(९) एक मनुष्य के पास दो वर्तनों में ची भरा था तो उसने प्रथम पहले वर्तन में से दूसरे वर्तन में इतना ची उंडेला जितना ची दूसरे वर्तन में भरा था फिर इसी तरह उसने दूसरी वेर दूसरे वर्तन में से पहले वर्तन में इतना ची उंडेला जितना ची कि पहली दफ्तर पहले वर्तन में से दूसरे वर्तन में ची उंडेले पीछे पहले वर्तन में बच रहा था और फिर तीसरी वेर उसने पहले वर्तन से दूसरे वर्तन में इतना ची उंडेला जितना ची कि दूसरी दफ्तर के दूसरे वर्तन में ची रह गया था तो अब दोनों

वर्तनों में वशवर आठ २ सेर घी हो गया बतलाओ कि पहले ही पहल दोनों वर्तनों में कितना २ घी था ॥

(२०) एक संबत है कि उस के तीन बर्य पीछे यूरोप खंड के पोर्तुगाल देश में लिस्बन नाम नगर भूचाल से नष्ट हो गया और उस संबत की संख्या के अंकों में यह संबंध है कि सहस्र के स्थान में तो अंक २ है और शत स्थानीय अंक, दश स्थानीय और एक स्थानीय अंकों के योग के तुल्य है और दश स्थानीय अंक, चारों स्थानों के अंकों के तृतीयांश योग के तुल्य है और एक स्थानीय अंक, सहस्र स्थानीय और शत स्थानीय अंकों के चतुर्थांश योग के तुल्य है तो बतलाओ कि लिस्बन नगर किस संबत में नष्ट हुआ ॥

### ॥ घात क्रिया और मूल क्रिया ॥

५७ परिभाषा जब एक राशि को उसी राशि से एक बार वा कई बार गुणा करें तो गुणन फल को पूर्व राशि का घात कहते हैं और गुणा करने में जितने बार राशि गुणा करे वह अवयव के स्वरूप में आवे उस संख्या को इस घात का घात प्रकाशक कहते हैं ॥ जैसे ३ × ५ वा ३ इससे ३ का दूसरा घात जाना जाता है और गुणा करने में ३ दो बार आयेगा उसे ही और जानो ॥

इस लिये गुणा करने में और घात क्रिया में कुछ अन्तर नहीं है और इस कारण जो गणितों गुणा करने के लिये लिख चुके हैं वे घात क्रिया के लिये भी

अवश्य होंगी और याद रखो कि घात क्रिया में गुण्य और गुणक तुल्य होते हैं ॥

॥ घात क्रिया में जो उपयोगी रीति हैं उन्हें लिखते हैं ॥

॥ प्रथम रीति ॥

एक अक्षर की राशि का दूसरा घात वा वर्ग करना हो तो उस के घात प्रकाशक को दूना कर दो जैसे

अ वा अ का वर्ग अ है

अ का वर्ग अ है क्योंकि  $अ \times अ = अ^2 = अ^2$  †

अ का वर्ग अ है क्योंकि  $अ \times अ = अ^2 = अ^2$  †

ऐसे ही और जानो ॥

॥ दूसरी रीति ॥

जो किसी घात वा दो गुणक रूप अवयवों की एक राशि का दूसरा घात वा वर्ग करना हो तो हर एक गुणक रूप अवयव का वर्ग करलो तो इन वर्गों का घात इष्ट राशि के वर्ग के तुल्य होगा ॥

अ क का वर्ग अ क है क्योंकि  $अ क \times अ क = अ क अ क = अ अ क क = अ क^2$  †

अ क इस का वर्ग अ क है क्योंकि  $अ क \times अ क = अ क अ क = अ अ क क = अ क^2$  †

अ क इस का वर्ग अ क है क्योंकि  $अ क \times अ क = अ क अ क = अ अ क क = अ क^2$  †

॥ ऐसे ही और जानो ॥

इसी रीति से अक्षर का वर्ग = अक्षर  $\times$  अक्षर =  $अ \times अ$

† २४ प्रक्रम ॥ ‡ ५ प्रक्रम ॥

य य र र = द्यैरे ॥

और २ अक ग का वर्ग = ४ अ कै गे ॥

ऐसे ही जो किसी राशि में और अधिक गुणाकरूप अवयव हों तो उन का जुदा २ वर्ग करके इन वर्गों को गुणा करलो ॥

### ॥ तीसरी रीति ॥

जो भिन्न का वर्ग करना हो तो उसके अंश और हर दोनों का जुदा २ वर्ग करलो ॥ जैसे

अक इस का वर्ग अक है क्योंकि  $\frac{अ}{क} \times \frac{अ}{क} = \frac{अअ}{कक} = \frac{अक}{क}$

अक ग च इस का वर्ग अक ग च है क्योंकि  $\frac{अक}{गच} \times \frac{अक}{गच} = \frac{अकअक}{गचगच} = \frac{अकगच}{गच}$

$\frac{अक}{गच} = \frac{अक}{गच}$  ॥

२ य इस का वर्ग ४ य है ऐसे ही जो और कोई भिन्न हो तो उस का वर्ग करलो ॥

### ॥ चौथी रीति ॥

जो दो पद की राशि हों और दोनों पद धन हों तो उस राशि के वर्ग करने की यह रीति है कि हर एक पद का जुदा २ वर्ग करके उन वर्गों को जोड़ दो और इस योग में दोनों पदों के दूने घात को मिला दो ॥

### ॥ कारण यह है ॥

अ + क इस का वर्ग अ + क + २ अक है ॥

अर्थात् अ का वर्ग + क का वर्ग + अ और क का दूना घात के तुल्य है ॥

॥ ४० प्रक्रम + ४ प्रक्रम ॥ २३ प्रक्रम का चौथा उदाहरण

## ॥ पांचवीं रीति ॥

जो दो पद की राशि में एक पद ऋण हो और उस राशि का वर्ग करना हो तो हर एक पद का जुदा २ वर्ग करके उन के योग में से दोनों पदों की दूनी घात को घटा दो कारण यह है अ—क इसका वर्ग अ+क—२ अ क है अर्थात् अ का वर्ग + क का वर्ग— अ और क का दूना घात के तुल्य है ॥

## ॥ उदाहरण ॥

$$(१) (१+२)^२ = १^२ + २^२ + २ \times १ \times २ = १ + ४ + ४ = ९ ॥$$

$$(२) (१-२)^२ = १^२ + २^२ - २ \times १ \times २ = १ + ४ - ४ = १ ॥$$

$$(३) (२+३)^२ = २^२ + ३^२ + २ \times २ \times ३ = ४ + ९ + १२ = २५ ॥$$

$$(४) (२अ+३क)^२ = (२अ)^२ + (३क)^२ + २ \times २अ \times ३क = ४अ^२ + ९क^२ + १२अक ॥$$

$$(५) (२अ+३क)^२ = (२अ)^२ + (३क)^२ + २ \times २अ \times ३क = ४अ^२ + ९क^२ + १२अक ॥$$

$$(६) (अक-१)^२ = (अक)^२ + १^२ - २ \times अक \times १ = अक^२ + १ - २अक ॥$$

५० चौथी और पांचवीं जो रीति लिखी हैं उनसे बड़ तेरे अंकों के वर्ग बिना लिखे केवल मन में विचार करने से निकाल आते हैं। जैसे २५ का वर्ग निकालना होता २५ = २० + ५ इस लिये २५ का वर्ग = २० का वर्ग + ५ का वर्ग + २० और ५ का दूना घात = ४०० + २५ + २०० ॥

$$= ६२५$$

२५ के वर्ग के निकालने में जो २ क्रिया करनी पड़ी है वे सब बिना लिखे मन में केवल विचार से हो सकती हैं

१५ का वर्ग निकालो ॥

$$\begin{aligned} १५ का वर्ग &= १० + ५ का वर्ग \\ &= १० + ५ + २ \times ५ \times १० \\ &= १०० + २५ + १०० \\ &= २२५ \end{aligned}$$

इस वर्ग के निकालने की दिशा से बड़े संकों का वर्ग सहज में निकल जाता है। जैसे ४६६ का वर्ग करो क्योंकि  
 $४६६ = ५०० - ३॥$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } ४६६ का वर्ग &= ५०० - ३ का वर्ग \\ &= ५०० का वर्ग + ३ का वर्ग - २ \times ५०० \times ३ \\ &= २५०००० + ९ - ३००० \\ &= २४९९९९ + ९ \\ &= २४९९९९९ \end{aligned}$$

इस वर्ग को बिना लिखे केवल मन में विचार करने से कर सकते हैं।  
 ५६ ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन से यह स्पष्ट जान पड़ता है कि जो एक पद की राशि का वर्ग करोगे तो वर्ग में भी एक ही पद होगा और जो दो पद की राशि का वर्ग करोगे तो वर्ग में तीन पद होंगे इससे यह बात निकलती है कि दो पद की राशि पूरा वर्ग नहीं हो सकती बा जो उस का वर्ग मूल ढीक चाहोगे तो न मिलेगा कारण यह है कि जो दो पद की राशि का वर्ग करते हैं तो वर्ग में तीन पद आते हैं और जो केवल एक पद की राशि का वर्ग करते हैं तो उसके वर्ग में भी केवल एक पद होता है इस कारण दो पद की राशि वर्ग करने में नहीं निकल सकती है ॥

इतना स्मरण रखो कि  $अ \times क$  इस का वर्ग  $अ \times क$  है



और  $\text{अ} + \text{क}$  इसका वर्ग  $\text{अ} + \text{क}$  नहीं परंतु  $\text{अ} + \text{क} + २\text{अ}$  क है और  $\text{अ}$  और  $\text{क}$  अक्षरों के स्थान में चाहे सो संख्या मान लो ॥

॥ ४ अभास के लिये प्रश्न ॥

। नीचे जो राशि लिखी हैं उनका वर्ग निकालो ।

- |                                      |                                        |
|--------------------------------------|----------------------------------------|
| (१) $\frac{५}{५}$                    | (११) $\frac{४}{५\text{अकग}}$           |
| (२) $\frac{५\text{अयंर}}$            | (१२) $\text{अ} + १$                    |
| (३) $\frac{५\text{अक}}$              | (१३) $\text{अक} + १$                   |
| (४) $\frac{५\text{अकग}}$             | (१४) $\text{य} + ३$                    |
| (५) $\frac{५\text{अक}}{५}$           | (१५) $२-२$                             |
| (६) $\frac{३\text{अय}}{२\text{कर}}$  | (१६) $२\text{अ}-२$                     |
| (७) $\frac{५\text{अक}}{२\text{अ}}$   | (१७) $२\text{य}-३\text{र}$             |
| (८) $\frac{५\text{अक}}{५}$           | (१८) $\text{य}-\frac{५}{३}$            |
| (९) $\frac{५\text{अक}}{५\text{अक}}$  | (१९) $\text{य} + \frac{३}{३}$          |
| (१०) $\frac{५\text{अक}}{५\text{अक}}$ | (२०) $\text{अय} + \text{अ}$            |
| (११) $\frac{५\text{अक}}{२\text{अ}}$  | (२१) $२\text{अय}-२$                    |
| (१२) $\frac{५\text{अक}}{२\text{अ}}$  | (२२) $\text{अकय} + \text{ग}$           |
| (१३) $\frac{५\text{अक}}{२\text{अ}}$  | (२३) $३\text{अय}-५$                    |
| (१४) $\frac{५\text{अक}}{२\text{अ}}$  | (२४) $\frac{३}{३}\text{अक} + \text{ग}$ |

॥ मूल क्रिया ॥

६० मूल क्रिया ठीक घात क्रिया से उलटी होती है और हम इस क्रिया से वह राशि जिसकी मूल संज्ञा है निकाल लेते हैं कि जिस पर घात क्रिया होने से इष्ट राशि निकली हो जैसे २५ का वर्ग मूल निकालो इसका यह

अर्थ है कि एक ऐसी संख्या निकालो जिस का वर्ग  $\sqrt{अ}$  है इस कारण  $\sqrt{अ}$  का वर्ग मूल  $\sqrt{अ}$  है क्योंकि  $\sqrt{अ}$  ऐसी राशि है कि उस का वर्ग  $\sqrt{अ}$  है। और ऐसे ही और जानो ॥

॥ पहली रीति ॥

६१ जो एक पद की राशि का वर्ग मूल निकालना हो तो उस के घात प्रकाशक को आधा करलो जैसे  $\sqrt{अ}$  इस का वर्ग मूल  $\sqrt{अ}$  वा  $\sqrt{अ}$  है क्योंकि  $\sqrt{अ} + \sqrt{अ} = \sqrt{अ}$   $\sqrt{अ}$  इस का वर्ग मूल  $\sqrt{अ}$  है क्योंकि  $\sqrt{अ} + \sqrt{अ} = \sqrt{अ}$  ऐसे ही और खोजो ॥

॥ दूसरी रीति ॥

६२ जो दो गुणकरूप अवयवों के घात का वर्ग मूल निकालना हो तो हर एक गुणकरूप अवयव का वर्ग मूल जुदा निकालो और उन मूल राशियों को गुणा हो तो यह घात इस घात का वर्ग मूल होगा ॥

इस का वर्ग मूल इस के स्थान में  $\sqrt{\quad}$  - यह चिन्ह लिखो ॥

॥ उदाहरण ॥

$\sqrt{अक} = \sqrt{अ} \sqrt{क}$  क्योंकि  $\sqrt{अ} \times \sqrt{अ} = \sqrt{अ}$   
 $\sqrt{अक} \times \sqrt{अक} = अक$  कारण यह है कि जो वर्ग मूल से गुणा करोगे तो घात वर्ग के तुल्य होगा ॥

$\sqrt{अक} = \sqrt{अ} \sqrt{क}$  क्योंकि  $\sqrt{अ} \times \sqrt{अ} = अ$   
 $\sqrt{अक} \times \sqrt{अक} = अक$  ॥

ऊपर जो उदाहरण लिखा है उस से यह ज्ञान पड़ता है कि  $\sqrt{अ} \sqrt{क}$  इस का वर्ग  $अक$  है और इस कारण  $\sqrt{अक}$  इस का वर्ग मूल  $\sqrt{अ} \sqrt{क}$  यह है ॥

इसी रीति से दो गुणकरूप अवयवों के घात का भी वर्ग मूल निकाल सकता है ॥

और ऊपर के उदाहरणों के अनुसार वह भी सिद्ध हो सता है कि जो तीन वा अधिक गुणक रूप अवयवों के घात का वर्ग मूल निकालना हो तो हर एक गुणक रूप अवयवों का वर्ग मूल ज्ञात निकाल लो और सब मूल राशियों को गुण दो तो यह घात इस घात का वर्ग मूल होगा। जैसे

$$\sqrt{अकग} = \sqrt{अ} \cdot \sqrt{क} \cdot \sqrt{ग} \text{ क्योंकि } \sqrt{अ} \cdot \sqrt{क} \cdot \sqrt{ग} \times \sqrt{अ} \cdot \sqrt{क} \cdot \sqrt{ग} = \sqrt{अकग} \parallel$$

। ऐसे ही और जानो।

॥ तीसरी रीति ॥

६३ जिस मिन का वर्ग मूल निकालना हो उस के अंश और हर दोनों का मूला वर्ग मूल निकाल लो ॥ जैसे

$$\sqrt{\frac{अ}{क}} = \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}} \text{ क्योंकि } \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}} \times \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}} = \frac{अ}{क} \text{ इससे यह } \frac{अ}{क}$$

मान पड़ता है कि  $\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}}$  ऐसी राशि है कि इस का वर्ग  $\frac{अ}{क}$  है इस कारण  $\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}}$  इस का वर्ग मूल  $\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}}$  है ॥

॥ उदाहरण ॥

$$\sqrt{\frac{१००}{६४}} = \frac{\sqrt{१००}}{\sqrt{६४}} = \frac{१०}{८} \text{ और } \sqrt{\frac{६४}{१००}} = \frac{\sqrt{६४}}{\sqrt{१००}} = \frac{८}{१०}$$

॥ चौथी रीति ॥

६४ जो तीन पद के घरे वर्ग का वर्ग मूल निकालना हो तो उन पदों को किसी एक अक्षर के घातों के अनुमा र ऊपर से लिखो अथवा जिस पद में अक्षर का बड़ा घा

त हो उसे पहले लिखो और फिर जिस पद में अक्षर का धात उसके बड़े धात में उतरता हो उसे लिखो तिस पीछे तीसरे पद को लिखो और भाग देने में भी यान्त्र और भाजक के पदों को किसी एक अक्षर के धातों के अनुसार लिखते हैं और इष्ट वर्ग के तीनों पद धन हों तो आदि और अंत के पदों का जुदा २ वर्ग मूल निकाल लो इन मूल राशियों का योग इष्ट वर्ग का वर्ग मूल होगा और जो इष्ट पूर्ण वर्ग का मध्य का पद अक्षर हो तो आदि और अंत के पदों के वर्ग मूलों का अंतर इष्ट वर्ग के वर्ग मूल के तुल्य होगा ॥ जैसे

अ + २ अ य + य इस पूर्ण वर्ग के पद अ अक्षर के धातों के अनुसार क्रम से लिखे हैं और उस पूर्ण वर्ग का वर्ग मूल  $\sqrt{अ^२ + २ अ य + य^२}$  वा अ + य यह है कारण यह है कि जो अ + य इस का वर्ग को तो वह अ + २ अ य + य होता है इसी रीति से अ - २ अ य + य इस का वर्ग मूल अ - य है ॥

॥ उदाहरण ॥

(१)  $\sqrt{अ^२ + १ + २ अ} = \sqrt{अ^२ + २ अ + १} = \sqrt{अ + १} = अ + १$

(२)  $\sqrt{य^२ + ४ - ४ य} = \sqrt{य^२ - ४ य + ४} = \sqrt{य - ४} = य - ४$

(३)  $\sqrt{४ + २ - ४ र} = \sqrt{४ - ४ र + ४} = \sqrt{४ - ४ र} = २ - २ र$

(४)  $\sqrt{य^२ - ५ य + ५} = \sqrt{य^२ - ५ य} = य - ५$

$$(५) \sqrt{y^2 + 2y + \frac{1}{4}} = \sqrt{y^2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = y + \frac{1}{2}$$

$$(६) \sqrt{m^2 + 2mn + n^2} = \sqrt{m^2} + \sqrt{n^2} = m + n$$

$$(७) \sqrt{25x^2 - 20xy + 4y^2} = \sqrt{25x^2} - \sqrt{4y^2} = 5x - 2y$$

$$(८) \sqrt{4a^2 + 4ab + b^2} = \sqrt{4a^2} + \sqrt{b^2} = 2a + b$$

इस लो + अ वा - अ का वर्ग करो तो ये यह वर्ग होगा इस कारण वर्ग मूल के दो चिह्न होने हैं जैसे + इसे धन वा ऋण पढ़ते हैं जैसे

$$\sqrt{a^2} = \pm a \text{ ऐसे ही } \sqrt{a^2 b^2} = \pm ab$$

$$\sqrt{a^2 + 2ay + y^2} = \pm (a + y) \text{ आदि}$$

$a + y$  और  $-(a + y)$  इन दोनों राशियों का वर्ग  $a^2 + 2ay + y^2$  है  $-(a + y)^2 = -a^2 - 2ay - y^2$  इस का वर्ग करते हैं।

$$-a - y$$

$$-a - y$$

$$= a^2 + 2ay$$

$$+ y^2$$

$$= a^2 + 2ay + y^2 \parallel$$

इस लिये—अ—य वा— (अ+य) इस का वर्ग अ+  
 २अय+य<sup>२</sup> इसका कारण यह है अ+२अय+य<sup>२</sup> कि इ  
 स का वर्ग मूल—अ—य वा— (अ+य) है ॥

पूर्ण वर्ग उस राशि को कहते हैं जिस का पूर्ण मूल मि  
 ल जाय जैसे २५ पूर्ण वर्ग है क्योंकि इस का ५ पूर्ण  
 वर्ग मूल है और २६ पूर्ण वर्ग नहीं है क्योंकि इस राशि  
 का ही मूल नहीं मिल सका वा ऐसी पूर्ण राशि नहीं  
 मिलती कि जो उस का वर्ग करे तो २६ हो ॥

६६ अ+ पूर्ण वर्गों के तीन पदों को एक अक्षर के घातों  
 के अनुसार क्रम से लिखो जैसे य+२अय+अ<sup>२</sup> य-पय+  
 य<sup>२</sup>+६य+६ आदि। तो इनमें प्रत्येक पूर्ण वर्ग के पदों  
 में यह संबंध दिखाई पड़ता है कि मध्य पद का वर्ग  
 आदि अंत के पदों के योग के घात के तुल्य है और जो  
 तीन पदों में यह संबंध न होगा तो उनसे पूर्ण वर्ग भी  
 न बनेगा जैसे य-७य+१६ यह पूर्ण वर्ग नहीं है और  
 इस के आदि अंत की वै और १६ यह राशि पूर्ण वर्ग  
 है और उस के पूर्ण वर्ग न होने का कारण यह है ॥

(७य) वा ४८य यह मध्य का वर्ग ४×१६ य वा ६४य  
 आदि अंत के पदों के ४ गुने घात की तुल्य नहीं है  
 परंतु य-७य+१६ यह राशि पूर्ण वर्ग है अथवा य-४  
 इस राशि का वर्ग है और पूर्ण वर्ग होने का यह भी का  
 रण है कि (८य) वा ६४य=४×१६ य इन उदाहरणों  
 से यह बात निकलती है कि जो हम दो पदों में तीसरा  
 ऐसा पद जोड़ा चाहें जिससे तीन पद की राशि पूर्ण वर्ग  
 हो जाय तो जिस पद को जोड़ो वह पद ऐसा लेना

चाहिये कि जब तीनों पदों को एक अक्षर के घातों के अनुसार क्रम से लिखें तो मध्य पद का वर्ग अक्षर अंत के पदों के योगने घात के समान हो ॥ जैसे यै + पय इस राशि में तीसरा पद मिलाकर पूर्ण वर्ग बनाओ ।

कल्पना करो कि पूर्व दाना पदा म र पद जोड़ने से पूर्ण वर्ग बन जाता है तो यै + पय + र यह पूर्ण वर्ग हुआ इस कारण जो पूर्ण वर्ग के पदों में संबंध रहता है उसे देखो ॥ तो

(पय) वा यै यै = ४ यै र ∴ र =  $\frac{यै}{४}$  अ इसे पूर्ण वर्ग

में र के स्थान में रखा तो यै + पय +  $\frac{यै}{४}$  यह पूर्ण वर्ग हुआ ॥

इसी राशि से जो यै - पय इस राशि में  $\frac{यै}{४}$  मिलाये

तो य - पय +  $\frac{यै}{४}$  यह पूर्ण वर्ग य -  $\frac{यै}{४}$  इस राशि का होगा

॥ उदाहरण ॥

यै + पय इसमें (  $\frac{यै}{४}$  ) जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का य + ३ मूल होगा ॥

यै - पय इसमें जो (  $\frac{यै}{४}$  ) वा  $\frac{यै}{४}$  जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का य - ४ मूल होगा ॥

य - पय इसमें जो  $\frac{यै}{४}$  जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का मूल य +  $\frac{यै}{४}$  होगा ॥

य +  $\frac{1}{2}$  य इसमें जो  $(\frac{1}{2})^2$  जोड़ो तो पूर्णवर्गका मूल  
 य +  $\frac{1}{2}$  होगा ॥

य -  $\frac{1}{2}$  य इसमें जो  $(\frac{1}{2})^2$  जोड़ो तो पूर्णवर्गका मूल  
 य -  $\frac{1}{2}$  होगा ॥

॥५॥ अभ्यासके लिये प्रश्न ॥

नीचे जो राशि लिखी हैं उनका वर्ग मूल निकालो ।

- |                                             |                                |
|---------------------------------------------|--------------------------------|
| (१) ४ अक ॥                                  | (७) १ + य - २ य ॥              |
| (२) ८ य ॥                                   | (८) ४ य + ४ य + ९ ॥            |
| (३) १०० अक ग ॥                              | (९) ४ अ + क - ४ अक ॥           |
| (४) ८ अ य ॥                                 | (१०) ८ य + ८ य + ९ ॥           |
| (५) ४ अ क ॥                                 | (११) य + य + $\frac{1}{4}$ ॥   |
| (६) $\frac{1}{4}$ . $\frac{म. य ४}{न. र २}$ | (१२) य + $\frac{1}{4}$ - २ य ॥ |

। नीचे जो राशि लिखी हैं उन्हें पूर्णवर्ग बनाओ ॥

- |                          |                              |
|--------------------------|------------------------------|
| (१३) य - १२ य            | (१८) य - $\frac{१४}{६}$      |
| (१४) य - १४ य            | (१९) य + $\frac{१०}{२}$ य ॥  |
| (१५) य + ११ य            | (२०) य - $\frac{१}{३}$ य ॥   |
| (१६) य + ३ य             | (२१) य - $\frac{१६}{३}$ य ॥  |
| (१७) य - य               | (२२) य - $\frac{३ य}{१०}$ ॥  |
| (१८) य + $\frac{४ य}{५}$ | (२३) य - $\frac{१४ य}{१०}$ ॥ |
|                          | (२४) य - $\frac{५७ य}{१०}$   |

॥ वर्ग समीकरण ॥

६७ परिभाषा वर्ग समीकरण दो प्रकारका होता है एक



वर्गसमीकरण और दूसरा मध्यमाहरण प्रथम ४६ प्रक्रमसे ४६ प्रक्रम तक जो २ रीतिलिखी हैं उनको किया जिस समीकरण पर करनेसे समीकरण में केवल अव्यक्तराशिकावर्ग रह जाय जैसे य<sup>२</sup> तो ऐसे समीकरणको वर्गसमीकरण कहेंगे दूसरे जिन समीकरणोंमें अव्यक्तराशिकावर्ग और उसका पहिला घात दोनों रहते हों जैसे य<sup>२</sup> और य ऐसे समीकरणोंको मध्यमाहरण कहेंगे ॥

६८ प्र० जिस रीतिसे एक घात एक वर्ण समीकरणमें अव्यक्तराशिका मान निकल आता है उस रीतिसे वर्गसमीकरणमें अव्यक्तराशिके वर्गका मान निकल आवेगा फिर वर्गमूल निकालनेसे अव्यक्तराशिका इष्ट मान मिल जायगा और जो पहिले ही समीकरणमें अव्यक्तराशिके साथ ऐसे स्वरूपमें मिली हो जैसे (य-अ) = क इस समीकरणमें य अव्यक्तराशि, अ, व्यक्तराशिके साथ मिली है वा समीकरणको लघुतमरूप करनेसे उसमें अव्यक्तराशि, व्यक्तराशिके साथ पूर्व स्वरूपमें मिली हों ॥

जैसे (य-अ) = क इसका वर्गमूल निकाला तो य-अ =  $\pm\sqrt{क}$  इसकारण पक्षांतरानयनसे य = अ  $\pm\sqrt{क}$

॥ उदाहरण ॥

(१) ३य-२ = ३य<sup>२</sup> + ३ इस वर्गसमीकरणमें यका मान बताओ ॥

पक्षांतरानयनसे ३य-३य<sup>२</sup> = ३+३  
योग करनेसे य<sup>२</sup> = ४

वर्गमूल निकालने से  $y = \sqrt{8} = \pm 2$

(३)  $\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 3$  इसमें  $y$  का मान निकालो छेव  
गमके अर्थ हरो के लघुसमापत्य ४८ से

समीकरणके प्रत्येक पद को गुणा करो तो

$$१६y^2 - १२y^2 - ३y^2 = १६$$

योग करने से  $y^2 = १६$

वर्गमूल निकालनेसे  $y = \sqrt{१६} = \pm ४$

(३)  $७(२y^2 - ६) + ५(३ - y^2) = १६८$  इसमें  $y$  का मान बताओ ॥

$७(२y^2 - ६) = १४y^2 - ४२$  और  $५(३ - y^2) = १५ - ५y^2$   
दूसकारण ४४ प्रक्रम के अनुसार कोष्ठ को दूर किया। तो

$$१४y^2 - ४२ + १५ - ५y^2 = १६८$$

पक्षांतरानयनसे  $१४y^2 - ५y^2 = १६८ + ४२ - १५$

योग करनेसे  $९y^2 = २२५$

९ का भाग देनेसे  $y^2 = \frac{२२५}{९} = २५$

वर्गमूल निकालनेसे  $y = \sqrt{२५} = \pm ५$

(४)  $\frac{४}{३+y} + \frac{४}{३-y} = ३$  इस समीकरणमें  $y$  का मान बताओ

$३+y$  से गुणा किया तो  $४ + \frac{१२+४y}{३-y} = ९ + ३y$

पक्षांतरानयनसे  $\frac{१२+४y}{३-y} = ५ + ३y$

$३-y$  से गुणा किया तो  $१२ + ४y = १५ + ९y - ५y - ३y^2$

पक्षांतरानयनसे  $३y^2 + ४y + ५y - ९y = १५ - १२$

योग करनेसे  $३y^2 = ३$

३ का भाग देनेसे  $y^2 = १$

वर्गमूल निकालनेसे  $y = \sqrt{१} = \pm १$  ॥

(५)  $(४y^2 - ५) = ४y$  तो  $y$  का मान बताओ

वर्गमूल निकालनेसे  $४य - ५ = \pm २य$  ॥

पक्षांतरानयनसे  $४य \pm २य = ५$  ॥

$\pm$  इसचिह्न को ह्राण वा धन पढ़ते हैं ॥

इसकारण  $२य = ५$  वा  $६य = ५$  ॥

इसलिये  $य = २\frac{५}{२}$  वा  $य = \frac{५}{६}$  ॥

### अभ्यासकेलिये प्रश्न

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उनमें  $य$  का मान बताओ ॥

(१)  $३य - ५ = \frac{५}{३} + ७$  ॥

(२)  $(य + ९)^२ = २य + ९७$  ॥

(३)  $(य + २)^२ = ४य + ५$  ॥

(४)  $(२य - ५)^२ = य^२ - ३०य + ७३$

(५)  $य^२ - \frac{३य^२ - २}{३} = ३ - \frac{२य^२ - ५}{३}$  ॥

(६)  $\frac{३य^२ + २५}{९} = ७ - \frac{५० + ५}{३}$  ॥

(७)  $\frac{य^२}{३} - \frac{५}{६} + \frac{य^२}{३} = ४\frac{२}{३}$  ॥

(८)  $१३\frac{२}{३} - \frac{य^२}{३} = २य^२ - ८\frac{२}{३}$  ॥

(९)  $\frac{३}{१ + य} + \frac{३}{१ - य} = ८$

(१०)  $\frac{१}{य^२} - \frac{२}{३य^२ + ९} = \frac{५}{४(३य^२ + ९)}$  ॥

(११)  $\frac{१४य^२ + १६}{२१} - \frac{३य^२ + ८}{५य^२ - ९} = \frac{२य^२}{३}$

(१२)  $(य - \frac{३}{४})^२ = \frac{१}{४}$  ॥

६८ मध्यमाहरण में अव्यक्त राशि के मान लाने की रीति लिखते हैं ॥

॥ रीति ॥

प्रथम ४६ प्रक्रम से ६८ प्रक्रम तक जो रीति लिखी है उनसे इष्ट समीकरण पर चंद्र गम, पक्षान्तरानयन, योग करना आदि क्रिया करने से पूर्व समीकरण का इस अर्थ + क य = ग मध्यमाहरण का सा स्वरूप कर लो जिस से जितने पदों में अव्यक्त राशि का वर्ग हो उन का योग करके वे सब अर्थ इस स्वरूप में आजाय और जितने पदों में अव्यक्त राशि का पहिला घात होवे सब योग करने से क य ऐसे स्वरूप में इकट्ठे हो जाय तो अर्थ इस स्वरूप की राशि को और क य इस स्वरूप की राशि को समीकरण के एक पक्ष में लिखो और सब व्यक्त राशियों को इकट्ठा कर जैसे ग दूसरे पक्ष में लिखो ॥

दूसरे जब समीकरण का अर्थ + क य = ग ऐसा स्वरूप हो जाय तो समीकरण की प्रत्येक राशि में अव्यक्त राशि के वर्ग वा य इस के गुण का भाग दो तो समीकरण का अर्थ + क य ग ऐसा स्वरूप हो जायगा और जो भाग देने से क और ग वे भिन्न पूर्णक हो जाय तो कर लो ॥

तीसरे जब समीकरण का अर्थ + क य = ग वा भाग देने से अर्थ + क य = च ऐसा स्वरूप हो जाय तो समीकरण के प्रत्येक पक्ष में च अव्यक्त राशि आधे गुण का वर्ग जोड़ दो तो जिस ओर के पक्ष में अव्यक्त राशि होगी उन को भिन्नाकर पूर्ण वर्ग हो जायगा ॥

चौथे जब अव्यक्त राशियों का पक्ष पूर्ण वर्ग हो जाय

तो समीकरण के हर एक पक्ष का जुदा २ वर्ग मूल निकाल लो इसे पूर्व समीकरण का एक वर्य एक घात समीकरण का स्वरूप हो जायगा इस कारण उसमें से य अ व्यक्त राशि का मान एक वर्य एक घात समीकरण सम्वन्धी पूर्व रीतियों पर क्रिया करने से निकल आवेगा ॥

॥ उदाहरण ॥

$३य - १२य + ३२ = य + १२य - ३२$  इस समीकरणमें य का मान बताओ ॥

पदान्तरानयन से  $३य - य - १२य - १२य = -३२ - ३२$  ॥

योग करने से  $३य - २४य = -६४$

दो का भाग देने से  $य - १२य = -३२$

दोनों पक्षोंमें  $(\frac{१}{३})$  वाई जोड़ा तो  $य - १२य + ६३ = ३६ - ३२ = ४$

वर्ग मूल निकालनेसे  $य - ६ = ४$

इस कारण से  $य = ६ + ४ = १०$  वा १०

य राशि के ८ गुणों ४ इत दोनों मानों को पृथक् २ इस समीकरण में य के स्थान में रक्खो तो भी समीकरण की समता बनी रहेगी। जैसे समीकरणमें य के स्थान में ८ रक्खा ॥

$३ \times ८ - १२ \times ८ + ३२ = ८ + १२ \times ८ - ३२$

वा  $२४ - ९६ + ३२ = ८ + ९६ - ३२$

योग करनेसे  $२४ = २४$

दूसरे य के स्थान में ४ रखना तो

$$३ \times ४ - १३ \times ४ + ३३ = ४ + २ \times ४ - ३३$$

$$\text{वा } ४८ - ४८ + ३३ = ३३ + ४८ - ३३$$

$$\text{योग करने से } ३३ = ३३$$

॥ उदाहरण ॥

$$(२) ५ (य - ५) - २य (य - २) = ६० \text{ इस समीकरण में}$$

य का मान बताओ ॥

$$५ (य - ५) = ५य - २५ \text{ और } २य (य - २) = २य^२ - ४य$$

$$\text{लिये } ५य - २५ - २य^२ + ४य = ६० ॥$$

$$\text{पक्षान्तरानयन से } २य^२ - ९य + ८५ = ६० + २५ ॥$$

$$\text{योग करने से } २य^२ + २य = ९० ॥$$

$$\text{इका भाग देने से } य + \frac{१}{२} य = \frac{४५}{२} ॥$$

इस समीकरण के दोनों पक्षों में  $(\frac{१}{२})^२$  जोड़ा ॥ तो

$$य + \frac{१}{२} य + (\frac{१}{२})^२ = \frac{९०}{२} + \frac{१}{४} = \frac{१८० + १}{४} = \frac{१८१}{४} ॥$$

$$\text{दोनों पक्षों का वर्ग मूल लिया तो } य + \frac{१}{२} य = \frac{१८१}{४} + \frac{१}{४} ॥$$

$$\text{पक्षान्तरानयन से } य = + \frac{१८१}{४} - \frac{१}{४} = \frac{१८०}{४} \text{ वा } \frac{४५}{१} ॥$$

$$= ४५ - ५ \frac{१}{२} ॥$$

$$(३) य + पय = ३ \text{ इस समीकरण में य का मान बताओ}$$

समीकरण के दोनों पक्षों में  $(\frac{१}{२})^२$  जोड़ा ॥ तो

$$य + पय + (\frac{१}{२})^२ = (\frac{१}{२})^२ + ३ ॥$$

$$= \frac{१}{४} + ३ ॥$$

$$\text{दोनों पक्षों का वर्ग मूल लिया तो } य + \frac{१}{२} य = ४ \sqrt{\frac{१}{४} + ३} ॥$$

पक्षान्तरानयन से  $y = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + m}$  ॥

इस समीकरण में  $p$  और  $m$  राशियों के स्थान में जो संख्या मान लो तो भी समीकरण की सत्यता बनी रहेगी और जो मध्यमाहरण इस  $y + py = m$  स्वरूप के होंगे उन में अव्यक्त राशि का मान लाने के अर्थ केवल

$y = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + m}$  इस समीकरण में  $p$  और  $y$  राशियों के स्थान में जो संख्या इस समीकरण में हो उन्हें रखने से अव्यक्त राशि का मान निकल आवेगा जैसे  $y + 4y = 22$  इस समीकरण में  $y + py = m$  इस समीकरण की अपेक्षा  $p = 4$  और  $m = 22$  इसलिये  $y$

$$= \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + m} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{4^2}{4} + 22}$$

$$= -2 \pm \sqrt{16} = -2 \pm 4 = 2 \text{ वा } -6$$

(४)  $\frac{y+2}{y-2} - \frac{y-2}{y+2} =$  इस समीकरण में  $y$  का मान बताने के लिये दोनों पक्षों को  $(y-2)(y+2)$  से गुणा तो  $(y+2)^2 - (y-2)^2 = (y-2)(y+2)$  ॥

ता  $y + 2y + 2 - y^2 + 2y - 2 = y^2 - 2$  ॥  
 पक्षान्तरानयन और योग करने से  $y^2 - 2y = 2$  ॥  
 दोनों पक्षों में  $(\frac{1}{2})^2$  या ४ जोड़ा तो  $y^2 - 4y + 4 = 2 + 4 = 6$  ॥  
 दोनों पक्षों का वर्ग मूल लिया  $y - 2 = \pm \sqrt{6}$  ॥

इस कारण पक्षान्तरानयन से  $y = \pm \sqrt{6}$  ॥  
 (५)  $y^2 + 2y + 2 = y^2 + 2$  इस समीकरण में  $y$  का मान बताने ॥

पहिले पक्षके भिन्नोको सम छेद करके जोड़ा ॥ तो

$$\frac{य + १ + य}{य + य} = \frac{१}{य + १} वा \frac{३य + १}{य + १} = \frac{१}{य + १} ॥$$

छेद गत्य के अर्थ दोनों पक्षोंको (य + य) (य + १) ॥

से गुणा तो (३य + १) (य + १) = य + य ॥

वा ३य + ५य + १ = य + य ॥

पक्षान्तरानयन और योग करने से य + ४य = -२

दोनों पक्षों में (३) वा ४ जोड़ा तो य + ४य + ४ = ४ - २ = २

दोनों पक्षों का मूल लिया तो य + २ =  $\pm \sqrt{२}$  ॥

पक्षान्तरानयन से य =  $-२ \pm \sqrt{२}$  ॥

॥ पूर्ण वर्ग करने का सूत्र लिखते हैं ॥

श्री धराचार्य सूत्रं ॥ चतुराहत वर्ग समे रूपैः

पक्षद्वयं गुणयेत् अव्यक्त वर्ग रूपैर्युक्तौ पक्षौ

ततो मूलम् १ ॥

इस का यह अर्थ है कि दोनों पक्षोंको अव्यक्त राशिके

वर्गके चार गुने गुणसे गुणा करे और फिर दोनों पक्षोंमें

अव्यक्त राशिके एक घातके गुणका वर्ग जोड़ दे अर्थात्

त जो समीकरण का अर्थ + क य = ग यह स्वरूप हो और

क और ग राशि ऋण हों बाधन तो समीकरणके दोनों

पक्षोंको ४ अ वा य के ४ गुने गुणसे गुणा कर दो और

फिर दोनों पक्षोंमें क वा य के गुण का वर्ग जोड़ दो और

फिर दोनों पक्षोंका वर्ग मूल निकालो ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) ३य + २ = ८५ इस समीकरण में य का मान बताओ ॥

४ × ३ वा १२ से गुणा तो ३६ य + २४ य = १०२०



२ का ४ को दोनों पक्षों में जोड़ा तो  $३६य^२ + २४य$   
 $+ ४ = १०२४$

दोनों पक्षों का वर्ग मूल निकाला तो  $६य + २० = ३२$

पक्षान्तरानयन से  $६य = ३२ - २०$   
 $= १० वा - ३४$

६ का भाग देने से  $य = ५ वा - ५ \frac{३४}{६} ॥$

(२)  $५य^२ - ६य + २ \frac{१६}{६} = ०$  इसमें य का मान बताओ ॥

पक्षान्तरानयन से  $५य^२ - ६य = -२ \frac{१६}{६} ॥$

$५य - ६ वा २०$  से गुणा किया तो  $१००य^२ - १००य = -४५$

दोनों पक्षों में ६ वा  $= २$  जोड़ा तो

$१००य^२ - १००य + ०२ = ०२ - ४५ = ३६$

दोनों पक्षों का मूल लिया  $१०य - ६ = \pm ६$

पक्षान्तरानयन से  $१०य = ६ \pm ६$

$= १५ वा ३$

१० का भाग देने से  $य = \frac{१५}{१०} वा \frac{३}{१०}$

$= \frac{३}{२} वा \frac{३}{१०} ॥$

$= २ वा \frac{३}{१०} ॥$

॥ ६ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

(१)  $य^२ = ३य + २० ॥$

(८)  $य^२ + \frac{३५}{२} = ३॥$

(२)  $य^२ = ५य - ४ ॥$

(९)  $य^२ - \frac{३५}{२} = \frac{५}{१०} ॥$

(३)  $य^२ - ६य = य - १६ ॥$

(१०)  $य^२ + \frac{३५}{२} = ६३ ॥$

(४)  $य^२ - १५य = १२० ॥$

(११)  $६य - ५य^२ = २ \frac{३५}{६} ॥$

(५)  $२५य - ०० = ५ ॥$

(१२)  $५य + ३ \frac{३५}{२} = ६ ॥$

(६)  $५य - य^२ = ४ ॥$

(१३)  $\frac{५य^२}{२} + \frac{३५य}{२} = ३१ ॥$

(७)  $७य - य^२ = ६ ॥$

(१४)  $\frac{३५य^२}{२} - \frac{३५य}{२} = ३६ ॥$

(८)  $य = य^२ - ३० ॥$

(१५)  $१२य^२ - ६य = ११ \frac{३५}{६} ॥$

(११०)  $\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} = 1$

(१११)  $\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = -\frac{a^2}{b^2}$

(११२)  $\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} = 1$

(११३)  $\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = 0$

(११४)  $a^2(b^2 + 1) - a^2(b^2 - 1) = 2a^2$

(११५)  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

(११६)  $a^2(b^2 - 1) = a^2(b - 1)(b + 1)$

(११७)  $a^2(b^2 - 1) = a^2(b - 1)(b + 1)$

(११८)  $a^2(b^2 + 1) + a^2(b^2 - 1) = 2a^2(b^2)$

(११९)  $a^2 + (b^2 + 1)a^2 = a^2(b^2 + 2)$

(१२०)  $a^2(b^2 - 1) - \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2(b^2 - 1 - \frac{1}{b^2})}{b^2}$

(१२१)  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{2a^2}{b^2}$

(१२२)  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{2a^2}{b^2}$

(१२३)  $\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}$

(१२४)  $\frac{a^2 + b^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1$

(१२५)  $\frac{a^2(b^2 - 1)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2(b^2 - 1 - 1)}{b^2} = \frac{a^2(b^2 - 2)}{b^2}$

$$(३३) \frac{३य-७}{८} = \frac{१}{२} - \frac{४(य-३\frac{१}{२})}{य+५} \parallel$$

$$(३४) \frac{४य-३}{३य-५} - \frac{३य-३}{य-१} = ३ \parallel$$

$$(३५) \frac{७+य}{७-य} + \frac{७-य}{७+य} = २\frac{८}{१०} \parallel$$

$$(३६) \frac{३य-५}{३य+५} + \frac{१३५}{१०६} = \frac{३य+५}{३य-५} \parallel$$

$$(३७) \frac{३य+२}{३य-२} + \frac{३य-२}{३य+२} = \frac{१५य+१९}{३य+२} \parallel$$

$$(३८) \frac{३}{५-य} + \frac{२}{४-य} = \frac{८}{य+२} \parallel$$

$$(३९) \frac{५य+३}{१०-य} = \frac{२य}{२५-३य} - \frac{१}{२} \parallel$$

$$(४०) \frac{य+८}{य+१२} + \frac{५}{य+४} = \frac{३य+२४}{३य+८} \parallel$$

(७२) कभी २ रेखा भी होता है कि जब दो समीकरणों में दो अव्यक्त राशि रहती हैं तो इन दो समीकरणों में एक द्वारा शोधन से मध्यमा हरणा समीकरण निकल आता है और इसमें अव्यक्त राशिका मान मध्यमाहरणा संबंधी रीतियों में ले आओ और इस मान को इस समीकरणों में से एक समीकरण में रख दो फिर एक नई एक घात समीकरण संबंधी रीतियों से दूसरी अव्यक्त राशिका मान निकालो ॥

॥ उदाहरण ॥

२य-८=य-२ } य और र का मान बताओ ॥

और २य-२=२य+२

पहिले समीकरण में पक्षान्तरानयन से ॥

२य-य=८-२ ॥

योग करने से य=८-२

पक्षान्तरानयन से र=८-य

र के मान ८-य को दूसरे इच्छ समीकरण में रखा तो

य (८-य)-(८-य)=२य+२

वा ०य-य-८+य=२य+२ पक्षान्तरानयन और योग

करने से य-७य=-२० दोनों पक्षों में (१/६) जोड़ा तो

य-७य+(१/६) = ४६/६-२० = ४/६ दोनों पक्षों का वर्ग

मूल लिया तो य-१/६ = ± २/३ पक्षान्तरानयन से

य = १/६ + २/३ = ५/३ वा २

और र = ८-य = ८-५/३ वा ८-२ = ३ वा ६ ॥

(२) २य-३य=२

और ३य+२र=८य } य और र का मान बताओ ॥

पहिले समीकरण को २ से गुणा किया तो ४य-६य=४

दूसरे समीकरण को ३य से गुणा किया तो ९य+६य=२४य

दोनों समीकरणों का योग करने से १३य=४+२४य ॥

पक्षान्तरानयन से १३य-२४य=४ ॥

दोनों पक्षों में १३ का भाग दिया तो य-२४/१३ य= ४/१३

दोनों पक्षों में (१/१३) जोड़ा तो य-२४/१३ य+(१/१३) = ४/१३

$$\frac{१४४}{(१३)२} + \frac{४}{(१३)} = \frac{४२ + २४४}{(१३)२} = \frac{२८६}{(१३)२}$$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लिजिये  $\frac{१३}{१३} = \pm \frac{१४}{१३}$

$$\begin{aligned} \text{पक्षान्तरानयन से } x &= \frac{१३}{१३} \pm \frac{१४}{१३} = \frac{१३ + १४}{१३} \text{ वा } \frac{१३ - १४}{१३} \\ &= २ \text{ वा } \frac{१}{१३} \end{aligned}$$

और दूसरे इष्ट समीकरण में पक्षान्तरानयन से  $२x = ८ - ३y = ८ - ६ \text{ वा } ८ + \frac{४}{१३} = २ \text{ वा } ८ \frac{४}{१३}$

इस लिये २ का भाग देने से  $x = १ \text{ वा } ४ \frac{२}{१३}$

॥ ७ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

- |                            |                                        |
|----------------------------|----------------------------------------|
| $y - २x = १$               | } $x - y = २$                          |
| (१) $३y - २x = ४०$         |                                        |
| $५y - ३x = १००$            | } (६) $२y - ३x = ९$                    |
| (२) $५y - ४x = ०$          |                                        |
| $३y + ०x = ०$              | } (७) $५y - २x = ४$                    |
| (३) $३y - ३x = २१$         |                                        |
| $६(y - x) = २७$            | } (८) $३y + ४y - ५x = २०$              |
| (४) $५x = २०$              |                                        |
| $३(y + x) = २ \frac{२}{५}$ | } (९) $५y - २x = ४$                    |
| (५) $८y = २$               |                                        |
| $३y + ३x = ११$             | } (१०) $३y + ४y = ३६$                  |
| (६) $५ + ५x = ४$           |                                        |
|                            | } (११) $३y + ३x = ५६$                  |
|                            |                                        |
|                            | } (१२) $\frac{४y}{५x} = \frac{१४}{१५}$ |
|                            |                                        |
|                            | } $y^2 + x^2 - ५y - ७x =$              |
|                            |                                        |

॥ वर्ग समीकरण सम्बन्धी प्रश्न ॥

(१) वह कौन सी संख्या है कि जो उसे उसके आधे से

गुणा करें तो घात ५० के तुल्य हो ॥

कल्पना करें कि य इष्ट संख्या है

तो य आधी इष्ट संख्या हुई

इस लिये प्रश्न के अनुसार  $y \times \frac{y}{2} = ५०$

वा  $\frac{y^2}{2} = ५०$

१ से गुणा किया तो  $y^2 = १०० ॥$

वर्ग मूल लिया तो  $y = \pm १० ॥$

इस कारण इष्ट संख्या + १० मानो वा - १० मानो तो

भी प्रश्न की सत्यता बनी रहेगी ॥

क्योंकि  $१० \times \frac{१०}{२} = १० \times ५ = ५० ॥$

और  $-१० \times \frac{-१०}{२} = -१० \times -५ = ५० ॥$

(२) कई आदिशियों ने निकल कर कई धान कपड़े

के नीलाम में खरीदे और उन्हें बजाज के हाथ बेचा

तो उन को उन धानों के बेचने में ५॥=) नफ़ा बचा

और जब उन्होंने इस नफ़ा को बांटा तो जितने म

नुष्य सारी थे उतने ही २३३ आने हर एक सारी को

मिले तो बतलाओ कि वे कितने सारी थे ॥

कल्पना करो कि य सारियों की संख्या है ॥

तो प्रश्न के अनुसार एक सारी को  $y \times \frac{२३३}{२}$  नफ़ा

के मिले होंगे और इस कारण य मनुष्यों को  $y \times y +$

$\frac{२३३}{२}$  आने नफ़ा के मिले होंगे और ५॥=) सब नफ़ा

है इस के आने ६० हुआ ॥

इस लिये  $y \times y + \frac{२३३}{२} = ६०$

$\frac{२३३}{२}$  का भाग देने से  $y = \frac{६० - \frac{२३३}{२}}{१} = ३६$

दोनों पक्षों का वर्ग मूल लिया तो  $y = \pm 6$   
 इस लिये 6 मनुष्य साक्षी थे और—इ मनुष्य व्यवहार  
 की रीति से इस प्रश्न का उत्तर ही नहीं सकता ॥

(३) एक मनुष्य ने जूलाहे से मोटे धोती के जोड़े  
 6) रुपये की मोल लिये और फिर उसने १३ 1/2 आने  
 एक जोड़े के हिसाब से सब जोड़े बेच डाले तो जितने  
 दायों को उसने एक जोड़ा मोल लिया था उतना उस  
 मनुष्य को नफ़ा हुआ तो बतलाओ कि उस मनुष्य  
 ने कितने जोड़े धोती के मोल लिये थे ॥

कल्पना करो कि य जोड़ों की संख्या है ॥

और सब जोड़ों के दाम 6) के आने किये तो 6) आने हुए ॥

अब त्रैशिक से १ जोड़े के दाम निकाले ।

य : २ :: 6) : 6) इतने आने एक जोड़े के दाम हुए  
 और उसने एक जोड़ा १३ 1/2 आने को बेचा इस लिये उस  
 ने सब य जोड़े य x १३ 1/2 आने को बेचे होंगे ये विकारी  
 के दाम हुए इनमें से खरीद के दाम निकाल लिये तो  
 य x १३ 1/2 - 6) इतने आने नफ़ा के बच रहे ॥

$$\text{इस लिये } y \times 13\frac{1}{2} - 6) = \frac{6)}{2}$$

दोनों पक्षों को २ से गुणा किया तो २७य - १२२य = १२२

३ का भाग देने से  $9य - 6४य = 6४$

८ का भाग देने से  $य - 8४य = \frac{6४}{8}$

पूर्ण वर्ग करने के लिये (3/2) जोड़ा तो  $य - \frac{6४}{8} य + (\frac{3}{2})^2$

$$= \frac{6४}{8} + \frac{9 \times 6४}{4}$$

$$= \frac{9 \times 6४}{4}$$

$$= \frac{9 \times 6४}{4}$$

दोनों पक्षों का मूल लिया तो  $y = \frac{32 \pm \sqrt{32^2 - 4 \times 40}}{2}$

पक्षान्तरानवयन से  $y = \frac{32 \pm 40}{2} = \frac{72}{2}$  वा  $\frac{-8}{2}$   
 $= 36$  वा  $-4$

इस लिये आठ जोड़ों की संख्या निकली ॥

(४) एक जमींदार ने ग्रामों के पेड़ों की दोड़ लगवाई और उसने बराबर दूर पर बराबर पंक्ति में बराबर २ धांभले एक वर्ग क्षेत्र में खुदवाये और जब उसने एक सिरे से फेड़ धरवाये तो सब धांभले पेड़ों में भर्गये और २१ फेड़ और बच रहे फिर उसने इन २१ पेड़ों को एक एक करके एक २ पंक्ति की सीध में लगवा दिये और २४ धांभले और खुदवाये और उसने देखा कि जो इन धांभलों में भी फेड़ लग जाय तो हर पंक्ति में बराबर २ फेड़ हो जायगे और चाहे जित और से पंक्ति को जो वर्ग क्षेत्र के स्वरूप में अन्तरन पड़ेगा तो बतलाओ कि उसने कितने फेड़ लगवाये ॥

कल्पना करो कि वर्ग क्षेत्र को एक भुज की और २ फेड़ लगे हैं तो  $y \times y$  वा  $y^2$  इतने फेड़ संपूर्ण वर्ग क्षेत्र में लगे होंगे इस लिये  $y^2 + २१$  इतने फेड़ आस के उसने लगवाये और जब उसने एक भुज के  $y$  पेड़ों की सीध में २ फेड़ लगवा दिये तो उस भुज की और के पेड़ों की संख्या  $(y+१)$  हुई और  $(y+१) \times (y+१)$  वा  $(y+१)^2$  इतने फेड़ दूसरे वर्ग क्षेत्र में हो जाते जो २४ फेड़ और होने इस लिये  $y$  के अनुसार ॥



$$(य + १) - २४ = य + ११$$

$$वाय + २ य + २ - २४ = य + ११$$

वृक्षान्तरानयन और योग करने से  $२य = २४$

$$२ का भाग देने से  $य = \frac{२४}{२} = १२$$$

$$वर्ग करने से  $य = २४$$$

इस लिये  $य + ११$  वा  $२४ + ११$  वा  $३५$  संपूर्ण पैड़ लगेयें।

अब चतुर्ग वर्ग क्षेत्र के प्रत्येक भुज अर्थात् ऊपर, नीचे, बाएँ और दाएँ में  $३५$  पैड़ नाम के लगे हैं और जो बाएँ की पैड़  $२१$  बच रहें उनमें से प्रथम तो एक पैड़ अर्थात् भुज की सीध में लगाया और दूसरे पैड़ को इस भुज के नीचे जो आसों के पैड़ों की पङ्क्ति लगी है उस के सीध में लगाया ऐसे ही ग्यारहवीं पङ्क्ति तक ग्यारहों पैड़ लगा दिये और बाकी छः पङ्क्ति जो नीचे रह गई उन के सीध में एक २ यांभले का चिह्न कर दिया और फिर सत्तरहवीं पङ्क्ति के यांभले के नीचे से चार बराबर यांभले और खोद लिये तो अचतुर्ग क्षेत्र के प्रत्येक भुज में अठारह पैड़ मले होंगये ॥



और १६॥३) के २७० आने हुए ॥

और पहिले य सफे की छपवाई के दाम ३२० आने  
ठहरे थे इस लिये त्रैराशिक से १ सफे की छपवाई के  
दाम ३२० आने हुए ॥

और पीछे से जब ५ सफे और मिलाये गये तो य+५  
इतने सफे की छपवाई के दाम २७० आने ठहरे इ  
स लिये त्रैराशिक से १ सफे की छपवाई के दाम  
२७० आने हुए ॥

और पीछे से कौ सफे की छपवाई के दाम २ आने क  
म ठहरे थे इस लिये प्रश्न के अनुसार  $\frac{३२०}{५} = \frac{२७०}{५+५} + २$   
२ क भाग देने से  $\frac{१६०}{५} = \frac{१३५}{५+५} + १$  दोनों पक्षों को य (य+५)  
से गुणनो १६० य + ८०० = १३५ य + ५ + ५ य ॥

पक्षान्तरानयन और योग करने से ॥

$$य - २० य = ८०० \text{ दोनों पक्षों में}$$

$$\left(\frac{२०}{५}\right)^२ \text{ वा } २०० \text{ जोड़ाये } - २० य + १०० = ८०० \text{ दोनों पक्षों का}$$

$$\text{वर्ग मूल लिया तो } य - १० = \pm ३०$$

$$\text{पक्षान्तरानयन से } य = २० \pm ३० = ५० \text{ वा } - १०$$

इस लिये प्रश्न का ४० सफे उत्तर हुआ और न—२०  
सफे क्योंकि—२० कहने से प्रश्न का उत्तर कुछ समय  
में नही आता और जो कोई पूछे कि किताब में कित  
ने सफे हैं और उस का उत्तर दिया जाय कि—२० सफे  
तो यह उत्तर हीकन होगा ॥

(६) १७, २, ३, ४, आदि गिन्ती के धरोसे आइ हैं कि

जो उन की क्रम से लो और पहिले दो आइों को रखतो  
तो संख्या बनेगी वह शेष दो आइों के घात की तुल्य होगी

तो बताओ कि वे कौन से चार अङ्क हैं ॥

कल्पना करो कि  $y, y+१, y+२$  और  $y+३$  ये ४ अङ्क हैं तो पहिले अङ्क  $y$  को दस स्थानीय अङ्क माने तो उस का अर्थ  $y$  दहाइयां वा  $१०y$  होगा ॥

और  $y+१$  इस दूसरे अङ्क को एक स्थानीय अङ्क माना तो प्रश्न के अनुसार  $(y+२)(y-३)$  ॥

तीसरे और चौथे अङ्कों का घात  $१०y + y + १$  के तुल्य होगा ॥ वा  $(y+२)(y+३) = १०y + y + १$  गुणा करके कोष्ठ को मिला दिया  $y^2 + ५y + ६ = ११y + १$  ॥

पक्षान्तरानयन और योग करने से ॥

$$y - ६y = - ५$$

पूर्णवर्ग करने से

$$y - ६y + ९ = ९ - ५ = ४$$

दोनों पक्षों का मूल लिया तो

$$y - ३ = \pm २$$

पक्षान्तरानयन से  $y = ३ \pm २ = ५$  वा १

इस कारण जो  $y$  का मान ५ मानो तो  $५, ५+१,$

$५+२$  और  $५+३$  अर्थात्  $५, ६, ७$  और  $८$  ये चार

अङ्क हुए कारण यह है कि  $५६ = ७ \times ८$  और जो

$y$  का मान १ मानो तो  $१, १+१, १+२, १+३$  अर्थात्

$१, २, ३$  और  $४$  इष्ट अङ्क हुए क्योंकि  $१२ = ३ \times ४$  ॥

(७) २० पुरुष और स्त्रियों ने पुरयार्थ ३) इकट्ठे कि

ये जिसमें सब पुरुषोंने मिल कर बराबर देकर १॥

इकट्ठा किया और सब स्त्रियोंने मिल कर बराबर देकर

१॥ इकट्ठा किया परन्तु पुरुषने स्त्री की अपेक्षा १॥

अधिक दिशा तो बतलाओ कि कितने पुरुषों और कितनी स्त्रियां ॥

कल्पना करो कि य स्त्रियों की संख्या है और र इतने पाने एक स्त्री ने दिये तो जैसे सब पुरुष और स्त्री निकलकर २० हैं इस कारण २० में से य स्त्रियों की संख्या निकाल डाली तो शेष २० - य यह पुरुषों की संख्या हुई और पुरुष ने स्त्री से १ पाना अधिक दिशा है इस लिये  $२ + १$  इतने पाने एक पुरुष ने दिये होंगे ॥

इस कारण य र इतने पाने सब स्त्रियों ने दिये होंगे और  $(२० - य) (२ + १)$  इतने पाने सब पुरुषों ने दिये होंगे और प्रश्न के अनुसार सब स्त्रियों ने मिलकर सर्वधन ३) वा ४८ पाने के आधे २४ पाने दिये और सब पुरुषों ने भी मिलकर २४ ही पाने दिये ॥

इस लिये  $य र = २४$  इन में य और र राशि  $(२० - य) (२ + १) = २४$  का मान बतलाओ ॥

दूसरे समीकरण में गुणा करने से

$$२० र + २० - य र - य = २४$$

और इस समीकरण में र के स्थान में  $\frac{२४}{य}$  यह मानो यहिले समीकरण से निकाला र खदिवा ॥ तो

$$२० \times \frac{२४}{य} + २० - २४ - य = २४$$

$$\text{वा } \frac{४८०}{य} - य = २४$$

पक्षान्तरात् य से  $\frac{४८०}{य} - य = २४$  ॥

य से गुणा किया तो  $४८० - य^२ = २४ य$

यस्मान्तरानयनसे  $४८० = य + २८य$

$$वा य + २८य = ४८०$$

पूर्णा वर्ग करने से  $य + २८य + (२४)^2 = ४८० + २४^2 = ६०६$

दोनों पक्षों का मूल लिया तो  $य + २४ = \pm २६$

यस्मान्तरानयनसे  $य = \pm २६ - २४ = २२वा - ४०$

और  $२० - य = २० - २२ = ८वा$   $२० - (-४०) = ६०$

$$\text{और } \frac{२४}{२४} = \frac{२४}{२४} = २वा \frac{२४}{४०} = \frac{२४ + \frac{२४}{२}}{४०} = \frac{२४}{४०}$$

$$\text{और } २ + ० = २वा$$

इस कारण २२ स्त्रियों की संख्या हुई और हर एक स्त्री ने २ अग्ने दिये और ८ पुरुषों की संख्या है ॥

और हर एक पुरुष ने ३ अग्ने दिये ॥

पूर्व सभीकरणों से जोय और र अव्यक्त राशियों के अज्ञान मान लिये हैं उनको प्रश्न के उत्तर निकालने में मत लो ॥

॥ ८ अग्रास के लिये प्रश्न ॥

- (१) १, २, ३ आदि गिन्ती के ऐसे दो अंक निकालो जिन का घात १५ के तुल्य हो ॥
- (२) गिन्ती के ऐसे तीन अंक निकालो जिन का योग पहिले दो अंकों के तुल्य हो ॥
- (३) १० के ऐसे दो खंड करो कि एक खंड दूसरे खंड के वर्ग के तुल्य हो ॥
- (४) २१० के ऐसे दो खंड करो कि एक खंड का वर्ग दूसरे खंड के तुल्य हो ॥
- (५) २५ के ऐसे दो खंड करो कि उन दोनों खंडों के

वर्गों का योग ३२३ हो ॥

(६) ३० के ऐसे दो खंड करो कि उन दोनों खंडों के वर्गों का अन्तर ३०० हो ॥

(७) दो ऐसी संख्या हैं कि उन का घात २४४ है और जो हर एक संख्या में २ जोड़ दिया जाय तो उन का घात २०० हो जाय तो बतलाओ कि वे कौन सी दो संख्या हैं ॥

(८) ऐसी संख्या निकालो कि उस के वर्ग और संख्या में २५६ का अन्तर हो ॥

(९) ऐसा भिन्न बताओ कि वह अपने वर्ग से २ के अनुमान बड़ा हो ॥

(१०) आगरे से कासी जी तक दो आंगरेजों की खड़खड़िये की डाक बैठी और वे दोनों आंगरेज एक ही समय में सवार हुए परंतु एक खड़खड़िये में जो घोड़े अदला बदली से लगे वे दूसरे खड़खड़ियों के घोड़ों से हर एक घंटे में २ मील सिवाय चले और जब अगला खड़खड़िया २५६वें मील के पथर तक पहुंचा तो बतलाओ कि हर एक खड़खड़िया हर एक घंटे में कितने मील चला होगा ॥

(११) एक बड़ाली प्रातःकाल के समय में नाज गंज से सिकन्दरे की ओर चग्घी पर बैठकर ६ मील गया परंतु लौटते वर पैदल आया और चग्घी पीछे २ चली आई जब उसने घड़ी देखी तो मालूम हुआ कि जो समय उसे जाते में लगा था उससे लौटते में ५० मिनट सिवाय लगे और उसने जब अपनी लौटने की चाल के

की की चाल से मिलाया तो मानसू हूँ कि उस के घंटे के चलने में और वगधी के एक घंटे के चलने में मील का अन्तर पड़ता है तो बतलाओ कि वगधी एक घंटे में कितने मील चली ॥

७) एक दयावान मनुष्य ने ६) बराबर लागत की ही मिखाइयां बनवाकर दीन मनुष्यों को बांट दीं और ऐसे ही दूसरे दयावान दाताने ६) की मिखाइ बनवाकर दीन लोगों को बांट दीं परन्तु पहिले दयावान मनुष्य ने जो लागत एक मिखाई के बनवा में लगवाई थी उसे एक माने कम लागत की मिखाई दूसरे दयावान मनुष्य ने बनवाई इस कारण मने पाब और अधिक दीन मनुष्यों को मिखाई बाँटी बतलाओ कि पहिले दयावान मनुष्य ने दीनों को कितनी बाँटी और दूसरे दयावान ने कितने मनुष्यों को मिखाई दी ॥

(१३) कई मनुष्य बराबर हिस्से के सामी से उनको ५) रुपये नकस के मिले तो उन्होंने बराबर २५) रुपये फिर उनमें ६) सामी निकल गए फिर भी बाकी सामियों को ४५) नकस के मिले जब उन्होंने इस धन को बाँटा तो हर एक को पहिले से ७) बाई अधिक मिली तो बतलाओ कि पहिले सब कितने सामी थे और हर सामी को सब कितना नकस मिला और जब ६) सामी निकल गए तो हर सामी को सब कितना नकस मिला ॥

(१४) सड़क के किन्तारे आगे और जान्ह पर दो



नगरों के बीच १०० मील का अन्तर था जिस दिन एक नगर से एक मनुष्य दूसरे नगर को चला उसी दिन दूसरे नगर में एक मनुष्य पहिले नगर को चला और पहिले नगर का मनुष्य दूसरे मनुष्य की अपेक्षा ६ मील हर रोज अधिक चलता और जितने दिन पीछे वे दोनों मनुष्य एक साथ मिले उतने दिनों की संख्या से दूने मील दूर एक मनुष्य चलता था तो बतलाओ कि हर एक मनुष्य कितने मील रोज चलता होगा ॥

(२५) सेज गाड़ी के अगले पहिये पिछले पहियों से छोटे होते हैं जब सेज गाड़ी १२० गज चली तो इस बीच में अगले पहियों ने पिछले पहियों की अपेक्षा ६ बार अधिक चक्कर दिया परन्तु एक और सेज गाड़ी थी कि उसके पहियों का घेरा पहिले सेज गाड़ी के पहियों के घेरे से एक २ गज बड़ा था और जब यह सेज गाड़ी १२० गज चली तो उसके अगले पहिये पिछले पहियों से ४ बार अधिक घेरे तो बतलाओ कि पहिली सेज गाड़ी के अगले पहियों का कितना घेरा था और पिछले का कितना ॥

॥ सभीकरण सम्बन्धी व्याख्या ॥

२२५० जब सभीकरण के दोनो पक्षों में भिन्न पद हों और उनके हरों में केवल शङ्कु हों जैसे ॥

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$  को ऐसे सभीकरणों में य सम्बन्ध राशि का शङ्कु गणित की रीति से भिन्न का लघुमान निकाल करके से मिलेगा और बिचायी को

यह अवश्य चाहिये कि वह पहिले अङ्क गणित जल्दी रीति से सीखलें तिस पीछे बीज गणित का आरम्भ करें क्योंकि बीज गणित में बहुतेरी जगह ऐसे प्रश्न आ न पडते हैं कि उनका उत्तर बिना अङ्क गणित जानने के उनसे नहीं निकल सकेंगे ॥

जैसे  $\frac{y}{5} + \frac{y}{8} + \frac{y}{3} - \frac{y}{9} = 26$  इसमें y का मान बताओ

क्योंकि  $\frac{y}{5} = y \cdot \frac{1}{5}$ ,  $\frac{y}{8} = y \cdot \frac{1}{8}$ ,  $\frac{y}{3} = y \cdot \frac{1}{3}$  और  $\frac{y}{9} = y \cdot \frac{1}{9}$

इसलिये  $y \cdot \frac{1}{5} + y \cdot \frac{1}{8} + y \cdot \frac{1}{3} - y \cdot \frac{1}{9} = 26$  ॥

वा य  $(\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}) = 26$  ॥

इस कारण य =  $\frac{26}{\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}}$

y का मान जो लिखा है इसका लघुतम रूप केवल अङ्क गणित की रीति से क्रिया करने से हो जायगा ॥

७३ ॥ वह भाज्य सभीकरणों के उदाहरणों में भिन्न पद होते हैं तो छेदगन क्रिया के स्थान में ऐसी क्रिया करने हैं जो नीचे उदाहरणों पर हुई है इससे सहज पसता है ॥

(१)  $\frac{2y-4}{30} + \frac{y-2}{15y-6} = \frac{2y}{6}$  इसमें y का मान बताओ

क्योंकि  $\frac{2y-4}{30} = \frac{2y}{30} - \frac{4}{30}$ ,  $\frac{y-2}{15y-6} = \frac{y}{15y-6} - \frac{2}{15y-6}$  +  $\frac{2y}{6} = \frac{4}{30}$

• ३३ और ३६ अङ्क य ॥

+ ३६ अङ्क य ॥

$$\text{दूसर लिये } \frac{१५}{७} - \frac{४}{२२} + \frac{१-२}{५५-६} = \frac{१५}{७}$$

शोधन और पक्षान्तरानयन से  $\frac{५-२}{५५-६} = \frac{४}{२१}$   
 $२१(५५-६)$  से गुणा करो तो

$$२१५ - ४२ = २०५ - २४$$

पक्षान्तरानयन और योग करने से  $य = २८$

७४॥ दो वर्ण समीकरण में एक वर्ण शोधन के लिये एक वर्ण वा अक्षर के गुणों का लघु समापवर्त्य निकालते हैं परंतु बहुधा दो वर्ण समीकरण में अव्यक्त राशियों का मान बिना लघु समापवर्त्य निकालने के मिल जाता है इस रीति को दिखाते हैं ॥

। ५५ प्रक्रम का दूसरा उदाहरण लिखते हैं ।

$$\left. \begin{aligned} (२) ५४५ - १०२२ = १५ \\ ३६५ - ७७२ = २२ \end{aligned} \right\} \text{य और र का मान बताओ ॥}$$

अन्तर करने से  $१८५ - ४४२ = -६$

२ से गुणा किया तो  $३६५ - ८८४ = -१२$

$$\left. \begin{aligned} ३६५ - ८८४ = -१२ \\ ३६५ - ७७२ = २२ \end{aligned} \right\} \text{दूसरा समीकरण ॥}$$

अन्तर करने से  $११२ = ३३$

२५ का भाग देने से  $र = ३$

और  $१८५ = ४४२ - ६ = १३२ - ६ = १२६$

१८ का भाग देने से  $य = \frac{१२६}{१८} = ७$

। ५६ प्रक्रम के प्रश्नों का १६ प्रश्न लिखते हैं ।

$$\left. \begin{aligned} १०१५ - २४२ = ६३ \\ १२३५ - २८२ = २६ \end{aligned} \right\} \text{य और र का मान बताओ ॥}$$

अन्तर करने से ३५ - ४२ = -७

इसे गुणा दिया १२५ - २४२ = -११७

और १०९५ - २४२ = १०७१

अन्तर करने से १०७१ = १०७१

८ की का भाग देने से  $१०७१ \div ८ = १३३$

और ४२ = १३५ + ३७ = १७२

८ का भाग देने से  $१७२ \div ८ = २१$  ॥

॥ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

५७५ - ३४२ = २३३

५४५ - ३५२ = १९३

य और र का भाग बताओ ॥

उत्तर प: ८ और र: २०

सम्बन्ध अनुपात ध्रुव राशि और चतु राशि परिभाषा  
 जब समान जाति की एक बड़ी राशि और छोटी राशि में  
 यह सम्बन्ध ढूँढते हैं कि बड़ी राशि में छोटी राशि कितनी  
 है तो इन छोटी राशियों की संख्या को पूर्व होने वाली  
 छोटी राशियों का सम्बन्ध कहते हैं बाजब सजातीय छोटी  
 राशि और बड़ी राशि में यह सम्बन्ध देखते हैं कि छोटी  
 राशि बड़ी राशि का कौन सा भाग है तो इस भाग को छोटी  
 बड़ी राशियों का सम्बन्ध कहते हैं इस परिभाषा से यह  
 जान पड़ता है कि जब दो राशियों में सम्बन्ध ढूँढना हो  
 तो पहिली राशि में दूसरी राशि का भाग दो जो लब्धि दि  
 ले वही दृष्ट सम्बन्ध होगा। जैसे बताओ कि ८ और ३  
 में क्या सम्बन्ध है तो  $८ \div ३ = २$  यही दृष्ट सम्बन्ध और ३

का सम्बन्ध ज्ञाता इस्से यह जाना जाता है कि ६ में ३ की  
न बार है ॥

ऐसे ही ३ और ६ में सम्बन्ध बताओ तो  $3 \div 6 = \frac{1}{2}$  ॥

यही ३ और ६ में सम्बन्ध ज्ञाता इस्से यह जान पड़  
ता है कि ६ का ३ तृतीयांश है ॥

ऐसे ही  $\frac{3}{4}$  इस्से  $\frac{3}{4}$  और  $\frac{1}{2}$  क इन दो राशियों का सम्ब  
न्ध जाना जाता है  $\frac{3}{4}$  और  $\frac{1}{2}$  के स्थान में चाहो जो  
संख्या मान लो और जो क से  $\frac{3}{4}$  बड़ा हो वा  $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$  क तो  
 $\frac{3}{4}$  इस्स का अर्थ है कि  $\frac{3}{4}$  में  $\frac{1}{2}$  इस्स का भाग  $\frac{3}{4}$  बार  
जाता है और जो क से  $\frac{3}{4}$  छोटा हो वा  $\frac{3}{4} < \frac{1}{2}$  क तो  $\frac{3}{4}$   
इस्स का यह अर्थ है कि क में  $\frac{3}{4}$  ऐसे  $\frac{1}{2}$  इतने भाग हैं

जब  $\frac{3}{4}$  और  $\frac{1}{2}$  क दो राशियों का सम्बन्ध लिखना हो  
ता है तो  $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$  क वा  $\frac{3}{4}$  कों लिखते हैं इस लिये  $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$  क =  
 $\frac{3}{4}$  वा  $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$  क और  $\frac{3}{4}$  क इन दोनों का एक ही अर्थ है ॥

ऐसे ही  $2 : 3 = \frac{2}{3}$  जो  $\frac{2}{3}$  और  $\frac{1}{2}$  क इन दो राशियों का  
सम्बन्ध और  $2 : 3$  क और  $\frac{2}{3}$  क इन दो राशियों का सम्बन्ध स  
मान हो वा  $2 : 3 = \frac{2}{3}$  क वा  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  क तो ॥

ऐसे दो सम्बन्धों की समता को अनुपात कहते हैं और  
इस्के लिखने की यह रीति है जैसे  $2 : 3$  क ;  $2 : 3$  क इस्स  
को यों पढ़ते हैं जो  $\frac{2}{3}$  और  $\frac{1}{2}$  क में सम्बन्ध है वही  $2$   
और  $3$  क में सम्बन्ध है क्योंकि  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  ॥

इस्स लिये  $2 : 3$  क ;  $4 : 6$  वा  $2$  और  $3$  क में जो सम्बन्ध है  
वही  $4$  और  $6$  क में सम्बन्ध है और  $2 : 3$  क और  $4 : 6$  क इन  
को अनुपातीय अवयव कहते हैं ॥

विद्यार्थी को चाहिये कि जब दो राशियों में सम्बन्ध होतो

उस का भिन्न रूप कर ले वही सम्बन्ध का मापक होगा जैसे  
 $\frac{3}{4}$  और क. इनका सम्बन्ध अः क वा  $\frac{3}{4}$  है और जो अनु-  
 पात हो तो उस के समीकरणारूप कर लो। जैसे अः कः।  
 गः घ इसको  $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$  यों लिखने हैं ॥

सम्बन्ध का जो भिन्न रूप कर लेते हैं इस्से जो क्रिया भि-  
 न्न पर हो सकती है वह सम्बन्ध पर भी हो सकती है और  
 भिन्न सम्बन्धी क्रियायों का बर्णन हो ही चुका है ऐसे ही  
 अनुपात को जो समीकरण के रूप में दिखते हैं इस्से स-  
 मीकरण सम्बन्धी क्रिया अनुपात पर हो सकती है ॥

## ॥ उदाहरण ॥

(१) ७:४ यह एक सम्बन्ध है और ८:५ यह दूसरा  
 सम्बन्ध है तो बतलाओ कि इन में कौन सा सम्बन्ध बड़ा है

७:४ इस सम्बन्ध का  $\frac{7}{4}$  मापक है ॥

८:५ इस सम्बन्ध का  $\frac{8}{5}$  मापक है ॥

$\frac{7}{4}$  और  $\frac{8}{5}$  इन के हरेण समन्वये किया ॥ तो

इन भिन्नो का  $\frac{35}{20}$  और  $\frac{32}{20}$  यह स्वरूप हुआ और  $\frac{35}{20}$

$\frac{35}{20} + \frac{3}{20}$  इस लिये  $\frac{35}{20}$  वा  $\frac{7}{4}$   $\frac{32}{20}$  वा  $\frac{8}{5}$  से बड़ा है ॥

अर्थात् ७:४ > ८:५ ॥

७६ ॥ जो सम्बन्ध के दोनों पदों को एक राशि से गुणा करें वा उनमें किसी एक राशि का भाग दें तो सम्बन्ध का मान ज्यों का त्यों ही बना रहेगा ॥

जैसे अः क यह एक सम्बन्ध है ॥

अः क =  $\frac{अ}{क}$  ७५ वें प्रक्रम के अनुसार ॥

और  $\frac{अ}{क} = \frac{अ.अ}{अ.क}$  ७५ वें प्रक्रम के अनुसार ॥

इसलिये अः क =  $\frac{अ.अ}{अ.क}$  = म.अः अ.क ॥

उल्लस से म.अः अ.क =  $\frac{म.अ}{अ.क} = \frac{अ}{क} = अः क ॥$

### ॥ उदाहरण ॥

२ः ३ = ४ः ६, ५ः २ = १५ः ६, ५ः ३ = १०ः ६

७७ जो अः कः गः घ तो अ.घ = क.ग और जो ॥

अ.घ = क.ग तो अः कः गः घ ॥

चोंकि अः कः गः घ या  $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$  इन तुल्य राशियों को

क.घ से गुणा किया तो  $\frac{अ.क.घ}{क} = \frac{ग.क.घ}{घ}$  ॥

परंतु अ.क.घ = क.अ.घ और ग.क.घ = घ.क.ग

इसलिये  $\frac{क.अ.घ}{क} = \frac{घ.क.ग}{घ}$  वा अ.घ = क.ग

जो अ.घ = क.ग तो इन तुल्य राशियों में क.घ का भाग

३ प्रक्रम ॥

दिया तो  $\frac{अ घ}{क घ} = \frac{क ग}{च}$  वा  $अः कः :: गः च$  ॥

इस कारण जो अनुपात के तीन पद मालूम हो तो उन से शेष चौथा पद भी मालूम हो जायगा ॥

जैसे जो  $अः कः :: गः य$  तो पूर्व रीति से  $अ य = क ग$  का भाग देने से  $य = \frac{क ग}{अ}$  यह त्रैशिक की उपपत्ति हुई और त्रैशिक की रीति से जो तीन पद अनुपात के ज्ञाने हुए रहते हैं तो उन से चौथा पद मिल जाता है ॥

७८ जो  $अः कः :: गः च$  तो  $क अ घ ग$  क्योंकि  $अः कः ::$

$गः च$  वा  $\frac{अ ग}{क} = \frac{घ}{च}$  इन तुल्य राशियों को  $क घ$  से गुणा

किया तो  $अ घ = क ग$  इन राशियों में  $अ ग$  इस का भा

ग दिया तो  $\frac{अ घ}{अ ग} = \frac{क ग}{अ ग}$  वा  $\frac{घ}{ग} = \frac{क}{अ}$

वा  $\frac{क}{अ} = \frac{घ}{ग}$  इस लिये

$कः अः :: घः ग$  ॥

७९ जो  $अः कः :: गः घ$  तो  $अ गः कः घ$  ॥

क्योंकि  $अः कः :: गः घ$  वा  $\frac{अ ग}{क} = \frac{घ}{ग}$  ॥

इन राशियों को  $\frac{क}{ग}$  से गुणा किया तो  $\frac{क अ ग}{ग क} = \frac{क ग}{ग घ}$

वा  $\frac{अ क}{क ग} = \frac{अ}{ग}$  वा  $\frac{अ}{ग} = \frac{क}{घ}$  इस लिये  $अः गः :: कः घ$

८० जो  $अः कः :: गः घ$  तो  $अ + कः कः :: ग + घः घ$



क्योंकि अः कः गः घ वा  $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$  ॥

इस राशियों में १ जोड़ा तो  $\frac{अ}{क} + १ = \frac{ग}{घ} + १$  वा  $\frac{अ+क}{क}$   
 $= \frac{ग+घ}{घ}$  इसलिये अ+कः कः ग+घः घ ॥

८१ जो अः कः गः घ और गः घः चः ज तो अः कः चः ज

क्योंकि अः कः गः घ वा  $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$   
गः चः चः ज वा  $\frac{ग}{घ} = \frac{च}{ज}$

इसलिये  $\frac{अ}{क} = \frac{च}{ज}$  कारण यह है कि ये दोनो राशि  $\frac{ग}{घ}$  के तुल्य हैं इसलिये अः कः चः ज ॥

८२ जो अः कः गः घ और कः चः घः ज तो अः चः गः ज

क्योंकि अः कः गः घ वा  $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$  ॥

और कः चः घः ज वा  $\frac{क}{च} = \frac{घ}{ज}$

इसलिये  $\frac{अ}{क} \times \frac{क}{च} = \frac{ग}{घ} \times \frac{घ}{ज}$

वा  $\frac{अक}{कच} = \frac{गघ}{घज}$

वा  $\frac{अ}{च} = \frac{ग}{ज}$  इसलिये अः चः गः ज ॥

॥ रेखा गणित के पांचवें अध्याय में जो अनुपात की परिभाषा लिखी है वह यह है ॥

परिभाषा जो चार राशि हों और उनमें पहिली और तीसरी राशि एक ही राशि से गुणी जाय और दूसरी और चौथा राशि भी किसी एक राशि से गुणी जाय और जो

पहिली राशि का घात, दूसरी राशि के घात से बड़ा हो  
और तीसरी राशि का घात भी चौथी राशि के घात से  
बड़ा हो वा ना पहिली राशि का घात दूसरी राशि के घा  
त के तुल्य हो ॥

और तीसरी राशि का घात भी चौथी राशि के घात से  
तुल्य हो वा जो पहिली राशि का घात दूसरी राशि के  
घात से छोटा हो और तीसरी राशि का घात भी चौथी  
राशि के घात से छोटा हो तो पहिली दूसरी तीसरी औ  
र चौथी राशि अनुपातीय होंगी ॥

जो बीजगणित की परिभाषा के अनुसार चार अनु  
पातीय राशि हों तो वे राशि रेखागणित की परिभाषा  
के अनुसार भी अनुपातीय होंगी ॥

जैसे जो अ. क ग. और घ ये अनुपातीय राशि हों  
तो  $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$  इन तुल्य राशियों को  $\frac{अ}{क}$  राशि से गुणा कि  
या तो  $\frac{अ}{क} = \frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$  ॥

या  $\frac{अ}{क} = \frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$  अत्र के गुणा से यह जान पड़ता है  
कि जो अ अ > न क तो म ग > न घ और जो म अ = न  
क तो म ग = न घ और जो म अ < न क तो म ग < न  
घ और पहिली और तीसरी राशि अ और ग जो अ  
से गुणा किया तो म अ और म ग यह घात हुई और  
दूसरी और चौथी राशि क और घ को न से गुणा कि  
या तो न क और न घ यह घात हुई इस कारण रेखा  
गणित की परिभाषा के अनुसार भी अ. क. ग. और  
घ ये चार राशि अनुपातीय हुई ॥

०५ जब एक राशि के ऊर्ध्व बुद्धे २ मान होते हैं तो ऐसी राशि को चल राशि कहते हैं और जो एक राशि का एक ही मान हो तो ऐसी राशि को ध्रुव राशि कहते हैं जब दो राशियों में ऐसा सम्बन्ध होता है कि जितनी गुनी एक राशि बढ़ जाय उतनी ही गुनी दूसरी राशि बढ़ जाय वा जितनी गुनी एक राशि घट जाय उतनी ही गुनी दूसरी राशि घट जाय तो ऐसे परस्पर सम्बन्ध को क्रम रूपान्तर कहेंगे ॥

जैसे एक मजदूर जो रोज़ पाता हो और वह अधिक दिन काम करे तो उसे उसी परिमाण से दाम भी सिवाय मिलेंगे और जो वह थोड़े दिन काम करेगा तो उसे उसी परिमाण से दाम भी कमती मिलेंगे इसलिये दाम और दिनों के बीच क्रम रूपान्तर होगा ॥

ऐसे ही अ और क जो दो ऐसी राशि हों कि उन के बीच क्रम रूपान्तर हो और जो अ राशि ग के समान हो जाय और क राशि घ राशि के समान तो अ:क::क:घ वह घा दो राशि में ऐसा परस्पर सम्बन्ध रहता है कि जो एक राशि घट बढ़ जाय तो दूसरी राशि भी अवश्य घट बढ़ जायगी परन्तु उन दोनों राशियों के बीच क्रम रूपान्तर न हो जैसे वर्ग क्षेत्र में जो भुज घट बढ़ जाय तो वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल भी अवश्य घट बढ़ जायगा परन्तु भुज और क्षेत्रफल के बीच क्रम रूपान्तर न होगा कारण यह है कि जो वर्ग क्षेत्र की भुज घटती हो जाय तो क्षेत्रफल चौर गुना हो जायगा ॥

जैसे जो भुज का मान २ है तो क्षेत्रफल ४ होगा और

जो भुज का मान  $२ \times २$  वा ४ हो तो  $४ \times ४$  वा  $१६$  क्षेत्रफल होगा ऐसे ही जो भुज तीन गुनी हो जाय तो क्षेत्रफल नौ गुना हो जायगा जैसे जो भुज का मान  $३ \times २$  वा ६ हो तो  $६ \times ६$  वा  $३६$  क्षेत्रफल होगा ॥

जब दो राशियों के बीच ० = ऐसा चिन्ह देखा तो जानो कि दोनों राशियों का रूपान्तर होता है ॥

॥ उदाहरण ॥

$२ \times ० = ०$  और  $० \times २ = ०$  तो अनुपात बनाने पर जब  $२$  का मान  $२०$  है तब  $०$  का मान  $२$  है और  $०$  और  $२$  के बीच क्रम रूपान्तर होता है ॥

इस लिये  $२ : २० :: ० : २$  और  $० : २ :: २० : २$   
 $२ : ० :: २० : २$

८५ परिभाषा जब किसी राशि का  $२$  वें भाग देते हैं तो उस भिन्न को व्यस्त राशि कहते हैं जैसे जो अब एक राशि हो तो  $\frac{१}{२}$  व्यस्त राशि होगी और राशि और व्यस्त राशि में ऐसा सम्बन्ध रहता है कि जो राशि जें गुनी बढ़ जाय तो व्यस्त राशि उतनी ही गुनी घट जायगी और जो राशि जें गुनी घट जाय तो व्यस्त राशि उतनी ही गुनी बढ़ जायगी जैसे ४ संख्या है इसकी  $\frac{१}{२}$  व्यस्त संख्या है जो ४ के स्थान में दो गुना ८ वा  $२ \times ४$  वा ८ संख्या हो तो चौथाई का आधा अर्थात्  $\frac{१}{४}$  वा  $\frac{१}{२}$  व्यस्त संख्या होगी और यह चौथाई का आधा है और जो चार के स्थान में ४ का आधा अर्थात्  $\frac{१}{४}$  वा २ संख्या जय तो चौथाई का दूना  $\frac{१}{४} \times २$  वा  $\frac{१}{२}$  व्यस्त संख्या होगी

और यह चौथाई दूनी है इसलिये जब दो राशियोंमें ऐसा सम्बन्ध होता है कि जब एक राशि जै गुनी घट जाय तो दूसरी राशि उतनी ही गुनी घट जाय और जो पहिली राशि जै गुनी घट जाय तो दूसरी राशि भी उतनी ही बढ़ जाय तो उसे उत्क्रम रूपान्तर कहेंगे ॥

जैसे अ और क इग का उत्क्रम रूपान्तर होता है तो इसको  $अ० = \frac{१}{३}$  यो लिखते हैं जो अ का स्वरूप ग हो जाय और क का स्वरूप घ तो अः ग ::  $\frac{१}{३} : \frac{१}{३}$  ॥

इस अनुपात की तीसरी और चौथी राशियोंको क घ से गुणा\* तो अः ग :: घः क ॥

जो कोई दैराह जल्दी से चिढ़ी ले जाता है और जितने समय में वह चिढ़ी पड़ंचा देगा उस समय में और उस की शीघ्रता में उत्क्रम रूपान्तर होगा क्योंकि जो वह मनुष्य दूनी जल्दी चले तो वह पूर्व समय की अपेक्षा आधे समय में पड़ंचेगा और ऐसे जो वह धीरे चलने लगे तो इसको चिढ़ी पड़ंचाने में अधिक समय लगेगा ॥

### ॥ उदाहरण ॥

र और य में उत्क्रम रूपान्तर है वा  $० = \frac{१}{३}$   
जो य = ३ और १ = १ तो अनुपात बनाओ

$$र : १ :: \frac{१}{३} : \frac{१}{३} \text{ वा } र : ३ :: १ : ३$$

$$\text{वा } र : ३ :: ३ : ९$$

\* ७६ मक्रम ॥

\* ७६ मक्रम ॥ † ७६ मक्रम

८६ दो राशियों के घात और तीसरी राशि के बीच क्रम रूपान्तर होता है ॥

जैसे जो मजदूर जितने आने रोज़ पाता हो उन आशों को जितने दिन वह काम करे उब में गुणा कर दे तो इस घात और उस के सब दामों में क्रम रूपान्तर होगा क्योंकि जो पूर्व घात दूना हो जायगा तो उस के दाम भी दूने हो जायगे और घात दो रीति से दूना हो सकता है कि तो दिन दूने हो जाय वा एक दिन की मिहनत के दूने दाम हो जाय जैसे जो एक मजदूर २ आने रोज़ पाता हो और वह ४ दिन काम करे तो उस के सब दाम  $४ \times २$  वा ८ आने हूँ जो वह ४ आने रोज़ पाते लगे तो वह ४ दिन में  $४ \times ४$  वा १६ आने कमा लेगा वा जो वह दो ही आने रोज़ पावे परंतु ८ दिन काम करे तो भी वह  $८ \times ८$  वा ६४ आने कमावेगा ॥

इस ही अ और क ग इन में क्रम रूपान्तर है वा अ० = क ग जो अ का स्वरूप घ हो जाय और क ग का स्वरूप च ज तो अः चः क गः च ज ॥

॥ उदाहरण ॥

ल० = यर जो य = २ र = २ और ल = २ तो अनुपात बतलाने  
 लः २० :: यरः  $२ \times २$  इस लिये लः यरः  
 २० : २ वा लः यरः २० : २

८७ जो दो चल राशि में परस्पर क्रम रूपान्तर का सम्बन्ध हो और उन दोनों राशियों के मान व्यक्त हों तो

रूपान्तर का समीकरण स्वरूप हो सकता है ॥

जैसे जो  $अ० = क$  और  $अ = ग$  और  $क = घ$  तो  $अः$   
 $गः$  का घ इस लिये  $अ घ = ग क$  का भाग देने से

$$अ = \frac{ग क}{घ} = \frac{ग}{घ} . क ॥$$

॥ उदाहरण ॥

$र० = य$  और  $द = १$  और  $र = ३$  तो  $य$  और  $र$  के बीच  
 समीकरण बनाओ ॥

$रः ३ :: यः १$  इस लिये  $३ र = ३ य$

जब  $अ$  और  $क$  दो राशियों में क्रम रूपान्तर हो तो  $\frac{अ}{क}$

यह सम्बन्ध सदा एकसा बना रहेगा क्योंकि यह तो हम  
 लिख ही चुके हैं कि जो भिन्न के अंश और हर को एक  
 राशि से गुणा करें वा उन में किसी एक राशि का भाग दें  
 तो भी भिन्न के मान में कुछ अन्तर न पड़ेगा अर्थात्  $\frac{अ}{क}$   
 ध्रुव राशि होगी यह  $अ$  और  $क$  इन के क्रम रूपान्तर  
 से न बदलेगी इस कारण  $\frac{अ}{क}$  इस के स्थान में म.प.  
 वा न कोई एक अक्षर रख देते हैं ॥

जैसे  $\frac{अ}{क} = म$  वा  $अ = म क$  ॥

जो  $ग$  और  $घ$  के बीच क्रम रूपान्तर हो वा  $ग० = घ$   
 तो  $\frac{ग}{घ}$  यह ध्रुव राशि ही बनी रहेगी परन्तु  $ग$  और  $घ$   
 के रूपान्तर होने से  $\frac{ग}{घ}$  यह राशि  $\frac{अ}{क}$  राशि के समान  
 हो जायगी इस लिये  $\frac{ग}{घ}$  को न के समान मान लेंगे अ  
 उसे म के समान न मानेंगे क्योंकि  $म = \frac{अ}{क}$  इस कारण  
 गुणा करने से  $ग = न घ$  ॥

## ॥ उदाहरण ॥

दो राशियों के योग और २ राशि के बीच क्रम रूपान्तर है और जिन राशियों का योग है उनमें से एक राशि और य राशि के बीच क्रम रूपान्तर है और दूसरी राशि और य इनके बीच क्रम रूपान्तर है तो इस क्रम रूपान्तर सम्बन्ध का समीकरण स्वरूप करो ॥

कल्पना करो कि  $\frac{\text{योग की एक राशि}}{य} = म \text{ और}$

$\frac{\text{योग की दूसरी राशि}}{य२} = न म \text{ और न ध्रुव राशि है इस लि}$

ये गुणा करने से योग की एक राशि = म य और योग की दूसरी राशि = न य और कल्पना करो कि  $\frac{मय + नय}{२}$  = प यह ध्रुव राशि है इस कारण गुणा करने से मय + नय = पर यही दृष्ट समीकरण हुआ ॥

जो य और २ दोनों राशियों के दोहो मान मालूम हो जाय तो म और न ध्रुव राशियों के मान भी मालूम हो जायगे ॥

## ॥ १० अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

(१) ३ अः १५ अ ॥

(७) अ पगः ३ अगय ॥

(२) २ यः १० य ॥

(८) ३ मरैः १२ यरै ॥

(३) अ यः क य ॥

(९) अ ग + क गः ग ॥

(४) अ क गः क ग ॥

(१०) २ अ य + यः म य ॥

(५) अ य रः २ य ॥

(११) १ यः १ य ॥

(६) ३ अ क यः २ अ य ॥

(१२) अ - कः अ + क ॥



॥ नीचे जो सम्बन्ध लिखे हैं उनका लघुतम रूप करो ॥

- (१३) ५ अ यः ८ य ॥ (१६) २ य रः ६ य ॥
- (१४) १६ व रः २० य ॥
- (१५) ३ अ यः ४ क य ॥ (१७)  $\frac{७ अ य र}{२ \times २ \times ३} \frac{५ अ र}{२ \times ३ \times ४}$

(१८)  $\frac{१ (१-२)}{१ \times २}$  अ यः  $\frac{३}{२}$  अ य ॥

(१९) १५: १६ यह एक सम्बन्ध है और १६: १७ दूसरा सम्बन्ध है तो बतलाओ कि इनमें कौन सा सम्बन्ध बड़ा है ॥

(२०) जो यः रः २: १ तो बतलाओ कि २ अ य ३ क र यह संबन्ध या ३ अ: २ क यह सम्बन्ध बड़ा होगा ॥

(२१) जो अ: क: ग: घ तो बतलाओ कि २ अ: ३ क: २ ग: ३ घ ॥

(२२) जो अ: क: क: ग तो बतलाओ कि अ: ग: अ: क ॥

(२३) अ: अ + य: अ - य: क इस अनुपात का समीकरण स्वरूप करो ॥

(२४) य: र: र: २ अ - र इस अनुपात का समीकरण स्वरूप करो ॥

(२५) जो अ + य: अ - य: ११: ७ तो अ: य इस सम्बन्ध का मान बताओ ॥

(२६) ऐसी दो संख्या बतलाओ कि उन का सम्बन्ध २: ३ इस सम्बन्ध के तुल्य मान हो और इन के योग और घात में जो सम्बन्ध हो वह ५: १२ इस सम्बन्ध के तुल्य हो ॥

(२७) अ य उ ग य ओर <sup>द्विगुर</sup> के अनुपात के पहिले तीसरे ओर चौथे पद हैं तो बतलाओ कि अनुपात का दूसरा कौन सा पद है ॥

(२८) दो कौन सी संख्या हैं कि उन का सम्बन्ध ३:४ इस सम्बन्ध के तुल्य हो और जो उन दोनों संख्याओं में ५ जोड़ा जाय तो उन का सम्बन्ध ४:५ इस सम्बन्ध के तुल्य हो ॥

(२९) जो ० = अ ओर य = २ ओर र = ४ अ तो य ओर र के बीच समीकरण बनाओ ॥

(३०) जो ० =  $\frac{१}{२}$  ओर य =  $\frac{१}{३}$  ओर र = ५ तो य ओर र के बीच समीकरण बनाओ ॥

(३१) जो १ + य ० = १ - य तो बतलाओ कि १ + य ० = य ॥

(३२) जो २ य + ३ र ० = ४ य + ५ र तो बतलाओ कि य ० = र ॥

॥ योगज श्रेढी और अंतर श्रेढी ॥

(८८) परिभाषा श्रेढी शब्द का अर्थ पङ्क्ति है जब एक पङ्क्ति में राशि इस क्रम से हो कि प्रत्येक दो पास की राशियों के बीच समान अन्तर होतो ऐसी पङ्क्ति को श्रेढी कहेंगे और श्रेढी के प हले पद को आदि पदवा श्रुत कहते हैं और सब से पहिले पद को अन्त पद कहते हैं और प्रत्येक दो राशियों के बीच जो समान अन्तर है उसे चय बोलते हैं और श्रुत और अन्त पद के बीच मिलने पद हों उन्हें मध्य पद और पदों की संख्या को गच्छ और श्रेढी के सब पदों



आदि श्रेणी है वा नहीं विचारते ही मालूम होगा कि श्रेणी है कारण यह है कि  $५-१=४$  और  $६-२=४$  और ऐसे ही  $१३-९=४$  और  $१७-१३=४$  आदि श्रेणी की राशि क्रम से ४ के जोड़ने से बढ़ती चली जाती है ॥

(८६) अ. अ + च. अ + २च. अ. + ३च आदि योग्य श्रेणी में अ आदि पद है, अ + च दूसरा पद है और अ + २च तीसरा पद ऐसे ही और जानो। इस से यह बात निकलती है कि जो स को श्रेणी के किसी पद की संख्या मानो जैसे पहिला वा दूसरा वा तीसरा आदि तो सौंवे स्थान का पद अ + (स-१) च इस के तुल्य होगा कारण यह है कि जो स को १ मानो वा पहिला पद निकालना हो तो अ + (स-१) च इसमें सके स्थान में १ रखवा तो अ पहिला पद हुआ क्योंकि  $अ + (१-१) च = अ + ० च$  ॥

$$= अ + ० = अ ॥$$

जो स को २ मानो और दूसरा पद निकालना चाहो तो अ + (स-१) च इसमें सके स्थान में २ रखवा तो अ + च यह दूसरा पद होगा ॥

$$\text{क्योंकि } अ + (२-१) च = अ + १ च = अ + च ॥$$

जो स को ३ मानकर तीसरा पद निकालना चाहो तो अ + (स-१) च इसमें सके स्थान में ३ रखने से अ + २च तीसरा पद हुआ ॥

क्योंकि अ + (३-१) च = अ + २ च = अ + २ च ऐसे ही जो चौथा पांचवा आदि पद निकालने हों तो निकाल लो

इसी रीति से अंतर श्रेणी में सौदे स्थान का पद  
 $अ - (स - २) च$  होगा ॥

(६०) इस कारण जो श्रेणी का आदि पद और  
 नव मात्स्य हो तो उन से श्रेणी का चाही जिस स्थान  
 का पद निकल सकता है ॥

### ॥ उदाहरण ॥

१, ५, ९, १३, १७ आदि श्रेणी का पचासवां पद ज्ञात  
 यह योग श्रेणी है इस कारण  $अ + (स - २) च$  इस  
 में सके स्थान में ५० रक्वा और  $अ$  के स्थान में १ और  
 $५$  के स्थान में  $५ - २$  वा ३ रक्वा तो  $१ + (५० - १) ५ =$   
 $१ + २४५ - ४ = २४२$  यही श्रेणी का पचासवां पद  
 हुआ ॥

(६१) श्रेणी के पदों का जो योग करना हो अर्थात्  
 श्रेणी फल लाना होते उन पदों का योग, योग करने  
 की रीति से कर सकते हैं परन्तु जब श्रेणी के बहुत से प  
 द हों तो इस रीति से योग करने में उलझाव दिखाई  
 देगा इस के लिये एक सुगम रीति लिखते हैं ॥

### ॥ रीति ॥

श्रेणी के आदि और अंत पद के अर्द्ध योग को श्रेणी  
 के पदों की संख्या वागच्छ से गुणा दो वा जो सुगम पद  
 तो आदि और अंत पद के योग के आधे गच्छ से गुणा  
 दो यही घात इस श्रेणी फल होगा ॥

१, ५, ९, १३, १७ आदि इस श्रेणी के पांच पदों का  
 श्रेणी फल ज्ञात ॥

१ पहिला पद और १७ अन्त पद इन का योग १८

हुआ इसका आधा हुआ इसको ५ गच्छ से गुणा तो ८ × ५ वा ४०  
 श्रेणी फल हुआ इसकी सत्यता देखने के लिये १+५+९+१३+१७  
 इसका योग करके देखो कि योग ४५ है या नहीं जो ४५ निकले  
 तो श्रेणी फल हीक जाली ॥

जो पूर्व श्रेणी के सौवें पद तक सब पदों का योग करना हो तो  
 प्रथम सौवें पद को ढूंढो ॥

$$१ + (१०० - १) \times ४ = १ + ४०० - ४ = ३९७$$

$$\text{अब दृष्ट योग} = \frac{१}{२} (१ + ३९७) \times १०० = १९९ \times १०० = १९९००$$

॥ श्रृंखला की उपयोगिता ॥

श्रेणी का आदि पद अ है और च चतुर्थ है और  
 प पिछला पद वा अंतर पद है ॥ तो

अ, अ + च, अ + २च, अ + ३च + आदि... + प यह  
 श्रेणी का स्वरूप हुआ और कल्पना करो कि श्रेणी के  
 पदों का योग यह है ॥ तो स = अ + अ + च + अ + २च  
 + अ + ३च + आदि... + य श्रेणी के पास के प्रत्ये  
 क दो पदों के बीच च अंतर समान है और योग  
 अ श्रेणी में प पिछला पद है इस लिये प-च पद अ  
 स के पूर्व होगा और प-च इस पद के पूर्व प-२  
 च यह पद होगा ऐसे ही श्रेणी के और पद होंगे उ  
 न को चक्रम से लिखा ॥ तो

$$\begin{aligned} \text{स} &= \text{अ} + \text{प} - \text{च} + \text{प} - २\text{च} + \text{आदि} \dots \text{अ} + \text{च} + \text{अ} \\ \text{और स} &= \text{अ} + \text{अ} + \text{च} + \text{अ} + २\text{च} + \text{आदि} \dots \text{प} - \text{च} \\ &+ \text{प} \text{ इन का योग किया तो } २\text{स} = \text{अ} + \text{प} + \text{अ} + \text{प} \\ &+ \text{अ} + \text{च} + \text{आदि} \dots \text{अ} + \text{प} + \text{अ} + \text{प} \text{ श्रेणी में लिखे} \end{aligned}$$

पद होंगे उतने ही बार  $\text{अ+य}$  आवेगा और जो ग को गच्छ वा पदों की संख्या मानो ॥ तो

$२य = ग$  बार  $\text{अ+य}$  वा ग  $\times (\text{अ+य})$  इस कारण  $य = \frac{१}{२} ग (\text{अ+य})$  ऐसे ही जो अंतर श्रेढी हो तो भी श्रेढी फल वा  $य = \frac{१}{२} ग (\text{अ+य})$  ॥

केवल अंतर श्रेढी में योगज श्रेढी की अक्षेपा + च के स्थान में - च होगा और उत्क्रम अंतर श्रेढी में - च के स्थान में + च होगा कारण यह है कि अंतर श्रेढी में कोई पद जैसे  $य$  पूर्व पद से च के समान छोटा होगा चा  $य + च$  पूर्व पद होगा इस लिये अंतर श्रेढी फल वा  $य = \text{अ, अ-च, अ-२च, अ-३च} + \text{आदि} \dots + य$  ॥

और  $य = य + य + च + य + २च + य + ३च + \text{अदि} + \text{अ}$  इन दोनों फलों का योग करने से  $२य = \text{अ} + य + \text{अ} + य + \text{अ} + य + \text{आदि अ} + य$  श्रेढी में जितने पद होंगे उतने ही बार  $\text{अ+य}$  आवेगा ॥

और जो ग को गच्छ वा पदों की संख्या मानो तो  $२य = ग$  बार  $\text{अ+य}$  वा ग  $(\text{अ+य})$  इस कारण  $य = \frac{१}{२} ग (\text{अ+य})$  ॥

(६३) अ और क दो राशि हैं उन के बीच मध्य पद हूँदो वा ऐसी राशि निकालो कि जब उन तीनों राशियों को क्रम से रक्ते तो उन में प्रत्येक पास की दो राशियों के बीच समान अंतर हो ॥

कल्पना करो कि य ऐसी राशि है तो अ, य, क, ये श्रेढी पद होंगे और जो योगज श्रेढी होगी तो

य-अ च य होगा और क-य भी चय होगा ॥

इस कारण य-अ=क-य

पक्षान्तरानयन से २य = अ+क

२ का भाग देने से य =  $\frac{अ+क}{२}$

इससे यह बात निकली कि जो योगज श्रेढी वा अन्तर श्रेढी की दो राशियों के बीच मध्य पद निकालना हो तो उन दोनों राशियों का आधायोग—इस मध्य पद होगा ॥

### ॥ उदाहरण ॥

(१) ६ और २० इन के बीच  $\frac{१}{२}$  (६+२०) वा १३ मध्य पद होगा अर्थात् ६, १३, २० ये श्रेढी पद हुए अ+क और अ-क इन के बीच  $\frac{१}{३}$  (अ+क+अ-क)

वा अ मध्य पद होगा अर्थात्

अ+क, अ, अ-क, ये श्रेढी पद हैं ॥

(टीका) अ और क दो राशि हैं उन के बीच मध्य पद निकालो वा ऐसी दो राशि ढूंढो कि जब उन चारों राशियों को क्रम से रखें तो उन में प्रत्येक पास की दो राशियों के बीच समान अन्तर हो कल्पना करो कि य और र इष्ट राशि हैं तो अ, य, र, क ये श्रेढी पद होंगे और अ और र इन के बीच का मध्य पद य =  $\frac{अ+र}{२}$  ऐसे ही य और क इन के बीच का मध्य पद र =  $\frac{य+क}{२}$  इन दो समीकरणों से य और र इन का मान लाओ ॥



पहिले समीकरण में २ का गुणा करने से

$$२य = ३अ + २ परन्तु दूसरे समीकरण में$$

$$२ = \frac{य + क}{३}$$

इस कारण  $२य = ३अ + \frac{य + क}{३}$  २ से गुणा किया तो

$$४य = २३अ + य + क \quad \text{शोधन से}$$

$$३य = २३अ + क \quad \text{३ का भाग देने से}$$

$$य = \frac{२३अ + क}{३}$$

और  $२य = ३अ + २$  यह जो समीकरण पूर्व लिखा है इसमें पश्चान्तरण यन और य का मान रखने से

$$२ = २य - ३अ = \frac{४३अ + २क}{३} - ३अ = \frac{अ + २क}{३} \parallel$$

इसलिये  $अ = \frac{२क + क}{३} = \frac{अ + २क}{३}$ , क ये श्रेढी पद हैं।

### ॥ श्रुत्याप ॥

$$\frac{२३अ + क}{३} - अ = \frac{क - अ}{३}, \quad \frac{२क + अ}{३} - \frac{२अ + क}{३} =$$

$$\frac{क - अ}{३} \quad \text{और} \quad क - \frac{अ + २क}{३} = \frac{क - अ}{३} \quad \text{इस्ते यह}$$

मालूम हुआ कि  $अ = \frac{२अ + क}{३}$ ,  $अ + २क$ , क इन श्रेढी पदों में पास के प्रत्येक दो पदों के बीच समानान्तर है वा उन पदों का  $\frac{क - अ}{३}$  अन्तर है ॥

४५ प्र० अ और क इन के बीच दो मध्य पद निकालने की दूसरी सुगम रीति बतलाते हैं ॥

कल्पना करो कि च अय है तो अ. अ + च, अ + च

क ये श्रेणी पद होंगे इस कारण इन में पास के प्रत्येक दो पदों के बीच समान अन्तर होगा और समान अन्तर च है ॥

इस कारण  $च = क - (अ + २च)$  कोष्ट मिटाने से

$च = क - अ - २च$  पक्षान्तरानयन से

$३च = क - अ$  उका भाग देने से

$$च = \frac{क - अ}{३}$$

इस कारण  $अ + च$ , और  $अ + २च$  ये मध्य पद

बुल्य हैं  $अ + \frac{क - अ}{३}$ ,  $अ + \frac{२क - अ}{३}$  वा  $\frac{२अ + क}{३}$  और

$\frac{अ + २क}{३}$  इन के ॥

इसी रीति से इष्ट दो राशियों के बीच दो से अधिक मध्य पद निकाल सकते हैं ॥

॥ उदाहरण ॥

(१)  $\frac{१}{४}$  और  $\frac{३}{४}$  इन के बीच मध्य पद निकालो ॥

मध्य पद =  $\frac{१}{४} + \frac{३}{४} = \frac{१}{४} \times \frac{३}{४} = \frac{३}{४}$  ॥

(२)  $\frac{१}{३}$  और  $\frac{२}{३}$  इन के बीच दो मध्य पद निकालो ॥

कल्पना करो कि  $च$  य है तो  $\frac{१}{३} + च$ ,  $\frac{१}{३} + २च$ ,  $\frac{२}{३}$

ये श्रेणी पद होंगे और इन में पास के प्रत्येक दो पदों के बीच समान अन्तर है। इस लिये

$$च य य = \frac{२}{३} - (\frac{१}{३} + २च)$$

$$\text{कोष्ठ मिलाने से} = \frac{२१}{६} - \frac{१}{३} - २य$$

$$= \frac{४}{६} - २य$$

$$\text{पक्षान्तर नयनसे ३य} = \frac{४}{६}$$

$$\text{अज्ञा भाग देने से म} = \frac{४}{२४} = \frac{१}{६}$$

रत्नलिये  $\frac{२}{३} + य \frac{२}{३} + २य$  ये मध्य पद तुल्य हैं  $\frac{२}{३} + \frac{२}{३}$   
और  $\frac{२}{३} + १$  वा  $\frac{५}{३}$  और  $१ \frac{१}{३}$  के

इस कारण  $\frac{१}{३}, \frac{५}{६}, १ \frac{२}{३}, \frac{२१}{६}$  ये श्रेणी पद हुए ॥

### ॥ गुणोत्तर श्रेणी ॥

जब एक पंक्ति में राशि इस क्रम से स्थापित हों कि प्रत्येक दो पास की राशियों में भाग लेने से समान लब्धि मिले वा पंक्ति के पहिले पद को किसी एक गुणक से क्रम से गुणा करने से शेष पद उत्पन्न हुए हों तो ऐसी पंक्ति को गुणोत्तर श्रेणी कहेंगे और उस गुणक को गुणोत्तर वा सम्बन्ध चाहे वह पूर्णाङ्क हो वा भिन्न जैसे २, २, ४, ८, १६, गह वर्द्धमान वा बढ़ती गुणोत्तर श्रेणी हैं कारण यह है कि इस श्रेणी में प्रत्येक पद पूर्व पद से दूना है (एसे ही १६, ८, ४, २, १ यह क्षीयमाण वा घटती गुणोत्तर श्रेणी है कारण यह है कि इस श्रेणी में प्रत्येक पद पूर्व पद से आधा है पहिली वर्द्धमान श्रेणी में २ गुणोत्तर हैं और दूसरी क्षीयमाण श्रेणी में  $\frac{१}{२}$  गुणोत्तर हैं ॥



कारण यह है कि जो तुम सको २ मानो तो अग  
 $s^{2-1} = अग^{2-1} = अग$  यह श्रेणी के दूसरे स्थान  
 का पद है ऐसे ही जो सको ३ मानो तो अग<sup>३-१</sup> = अ  
 $s^{3-1} = अग^{3-1}$  यह श्रेणी के तीसरे स्थान का पद है  
 जो सको ४ मानो तो अग<sup>४-१</sup> = अग<sup>३</sup> = अग<sup>३</sup>  
 यह श्रेणी का चौथा पद है; ग का घात प्रकार दूस  
 रे पद में १ है और तीसरे पद में २ है और चौथे पद  
 में ३ है; वः पद के स्थान की संख्या से ग का घात प्र  
 काशक १ कम है ॥

८० = ३० इस लिये जो गुणोत्तर श्रेणी में आदि  
 पद और गुणोत्तर बालूम हो तो उन से श्रेणी का  
 चालो जो पद निकाल लो क्योंकि जिस पद को नि  
 काला चाहते हो उस क स्थान की संख्या स हो और  
 अ आदि पद हो और ग गुणोत्तर तो सर्वे स्थान  
 का पद = अग<sup>स-१</sup> ॥

॥ उदाहरण ॥

१, ३, ९, २७, आदि गुणोत्तर श्रेणी का आठवां  
 पद निकालो तो अ आदि पद = १ और  $\frac{3}{1} = 3$   
 गुणोत्तर और  $s = 8$

इस लिये अग  $= 1 \times 3^{8-1} = 1 \times 3^7 = 2187$  ॥

योग करने की रीति से गुणोत्तर श्रेणी के पदों का  
 योग वा श्रेणी का ल मिल सकता है परन्तु जो श्रेणी  
 में बहुत पद हों तो योग करने की रीति से श्रेणी का  
 ल लाने में बहुत देर लगेगी और उल्लेख्य शिवाये

देगा इस कारण अगले ६६ प्रक्रम में श्रेढी फल  
लाने की सुगम रीति लिखते हैं ॥

६६ प्र० गुणोत्तर श्रेढी के पदों के योग करने वा  
श्रेढी फल निकालने की रीति ॥

॥ उपपत्ति ॥

कल्पना करो कि अ, क, घ, च, आदि, य, प, ग गुणो  
त्तर श्रेढी के पद हैं और ग गुणोत्तर है तो श्रेढी के  
अ आदि पद को ग गुणोत्तर से गुणा तो अ ग  
दूसरा पद हुआ परन्तु श्रेढी का क दूसरा पद है।

इस कारण क = अग

ऐसे ही घ = कग

च = घग

आदि = आदि

य = मग

योग करने से क + घ + च + आदि + य = अग + क  
ग + घग + आदि + मग = (अ + क + घ + आदि + म)

य यह प्रथम समीकरण हुआ ॥

जो य को सब पदों का योग वा श्रेढी फल मानो  
तो अ + क + घ + च + आदि + म + प = य ॥

पक्षान्तरा नयन से

क + घ + च + आदि + म + प = य - अ और पक्षान्तरा

नयन से ही अ + क + घ + आदि + म = य - प ॥

और अ आदि पद है और प अन्त पद ॥

इस लिये प्रथम समीकरण का स्वरूप यह हुआ

य - अ = (य - अ) ग

= य ग - प ग पक्षान्तर नयन से

य ग - ४ = प ग - ३ ॥

या (ग - १) ४ = प ग - ३ ॥

ग - १ इस का भाग देने से

$$य = \frac{प ग - ३}{ग - १} \text{ यही श्रेढी फल हुआ ॥}$$

इस लिये जो किसी और गुणोत्तर श्रेढी का फल निकालना चाहते अत्र आदि पद य अन्त पद और ग गुणोत्तर इन के स्थान में जो कुछ श्रेढी में राशि हो उन को  $\frac{प ग - ३}{ग - १}$  इस श्रेढी फल में रखते तो जो राशि मिलेगी वही कुछ श्रेढी फल होगा ॥

### ॥ उदाहरण ॥

१, २, ४, ८, १६ आदि १० २४ इस श्रेढी का श्रेढी फल निकालो २ आदि पद है २ वा २ गुणोत्तर है और १० अन्त पद है इस लिये  $\frac{प ग - ३}{ग - १}$  श्रेढी फल में, य ग और २ के स्थान में क्रम से १, २ और १० २४ रखते तो

$$\text{कुछ श्रेढी फल} = \frac{१० २४ \times २ - २}{२ - १} = २० ४७$$

इस उत्तर की सत्यता जानने के लिये, १, २, ४, ८, १६, ३२, ६४, १२८, २५६, ५१२, १०२४ इस श्रेढी के लक्ष्य पदों का योग करो और जो योग २० ४७ हो तो पूर्व श्रेढी फल की सत्यता जानो ॥

१० २४ अ और क इस दो राशियों के बीच मध्य पद निकालो कल्पना करो कि य मध्य पद है तो अत्र क से श्रेढी पद हुए और  $\frac{य}{अ} = \text{गुणोत्तर}$  यही क

गुणोत्तर इस लिये  $\frac{य}{अ} = \frac{क}{य}$  अथ से गुणा करने से  $य^2 = अक$  ॥

- वर्ग मूल लिया तो  $य = \sqrt{अक}$  यह मध्य पद हुआ इससे यह बात निकलती है कि जो गुणोत्तर श्रेणी में दो राशियों के बीच मध्य पद निकालना हो तो दोनों राशियों के घात का वर्ग मूल इष्ट मध्य पद होगा ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) १६ और ६४ के बीच  $\sqrt{१६ \times ६४}$  वा  $\sqrt{१०२४}$  वा ३२ मध्य पद है अर्थात् १६, ३२, ६४, ये श्रेणी पद हैं ॥

$\frac{अ}{क}$  और  $\frac{क}{अ}$  इन के बीच  $\sqrt{\frac{अ}{क} \cdot \frac{क}{अ}}$  वा  $\sqrt{१}$  वा मध्य पद है अर्थात्  $\frac{अ}{क}$  १  $\frac{क}{अ}$ , ये श्रेणी पद हैं ॥

१०२ प्र० अ और क इन दो राशियों के बीच दो मध्य पद निकालो ॥

कल्पना करो कि य और र मध्य पद हैं तो अ. य. र. क. ये श्रेणी पद हुए और ग को गुणोत्तर मानो तो अ आदि पद को ग से गुणा। तो

- अ ग = य दूसरा पद हुआ इसी रीति से
- य ग = र तीसरा पद हुआ
- र म = क चौथा पद हुआ

दूसरे समीकरण को ग से गुणा तो  $य ग^2 = र ग = क$  और पहिले समीकरण को ग से गुणा तो  $अ ग^3 = य ग^2$  और  $य ग^2 = क$  इस कारण  $अ ग^3 = क$



अ का भाग देने से ग =  $\frac{क}{अ}$

घन मूल लिया तो ग =  $\sqrt[3]{\frac{क}{अ}}$

इस लिये य = अ ग = अ  $\sqrt[3]{\frac{क}{अ}}$

$$\begin{aligned} \text{और र} &= य ग = अ \sqrt[3]{\frac{क}{अ}} \times \sqrt[3]{\frac{क}{अ}} \\ &= अ \left( \sqrt[3]{\frac{क}{अ}} \right)^2 \end{aligned}$$

१०२ प्र० दो राशियों के बीच दो मध्य पदों को सहज से निकालने की रीति बतलाते हैं ॥

कल्पना करो कि अ और क राशियों के बीच मध्य पद निकालना है और ग गुणोत्तर है तो अ, अग, अग<sup>२</sup>, क, ये श्रेणी पद होंगे ॥

और  $\frac{क}{अ} = ग^३$  गुणोत्तर

ग से गुण किया तो  $\frac{क}{अ} = ग^३$

घन मूल लिया तो ग =  $\sqrt[3]{\frac{क}{अ}}$

और अ ग = अ  $\sqrt[3]{\frac{क}{अ}}$  पह पहिला मध्य पद हुआ ॥

और अ ग<sup>२</sup> = अ  $\left( \sqrt[3]{\frac{क}{अ}} \right)^२$  यह दूसरा मध्य पद हुआ ॥

इसी रीति से जो श्रेणी के आदि पद और अन्त पद मालूम हों तो उस से श्रेणी के सब मध्य पद मालूम हो सकते हैं ॥

॥ उदाहरण ॥

$\frac{१}{३}$  और  $\frac{१}{६}$  इन के बीच का मध्य पद बतलाओ मध्य पद =  $\sqrt[३]{\frac{१}{३} \times \frac{१}{६}} = \sqrt[३]{\frac{१}{१८}} = \frac{१}{\sqrt[३]{१८}}$

\* ६६ प्रश्न ॥

$\frac{१}{६}$  और ३ के बीच हो मध्य पद निकालो  
कल्पना करो कि य गुणोत्तर है तो

$\frac{१}{६}, \frac{१}{६} y, \frac{१}{६} y, ३$  ये श्रेणी पद हूए

और  $३ = \frac{१}{६} y = y$  गुणोत्तर

$$\text{वा } \frac{१}{६} = y$$

य से गुणा तो  $१७ = y$

यह मूल लिखा तो  $३ = y$  इस लिये ३ गुणोत्तर है

और  $\frac{१}{६} y = \frac{१}{६} \times ३ = \frac{१}{२}$  पहिला मध्य पद हुआ

और  $\frac{१}{६} y = \frac{१}{६} \times ३ = १$  दूसरा मध्य पद हुआ

इस कारण  $\frac{१}{६}, \frac{१}{६}, १, ३$  ये श्रेणी पद हूए ॥

॥ ११ श्रम्यास के लिये प्रश्न ॥

नीचे जो तीन श्रेणी लिखी हैं उन में प्रत्येक श्रेणी  
का पाँचवाँ और बीसवाँ पद बताओ ॥

(१) २, ६, १२, ... आदि

(२) १६, १५, १४, ... आदि

(३)  $\frac{१}{३}, \frac{२}{३}, २, ...$  आदि

नीचे जो सात श्रेणी लिखी हैं उन में प्रत्येक श्रेणी

के बीसवें पद तक का श्रेणी फल बताओ ॥

(४) २, ३, ५, ७, ... आदि

(५) ५, ८, १२, १८, ... आदि

(६) १००, ११०, १२०, ... आदि

(७) १००, ६७, ६४, ... आदि

(८) १५, १२, ७, ... आदि

(९)  $\frac{१}{२}, \frac{१}{३}, २, ...$  आदि

(१०) १३, १२ $\frac{३}{४}$ , १२ $\frac{३}{४}$  आदि

(११) एक बनिये ने गल्ले में कुछ रुपये जैसे बर्ष दिन वा ३६५ दिन में इसी रीति से इकट्ठे किये कि पहिले दिन उसने  $\frac{१}{४}$  पाई के बराबर कौड़ियां गल्ले में डाली और दूसरे दिन  $\frac{१}{४}$  पाई की कौड़ियां तीसरे दिन  $\frac{३}{४}$  पाई की कौड़ियां और चौथे दिन एक पाई परन्तु ७वें दिन वा रविवार को नागा की ऐसे ही उस बनिये ने क्रम से गल्ले में धन डाला और हर रविवार को नागा रखी तो बतलाओ कि उस ने ३६५ दिन में कितना धन इकट्ठा किया और जो वह इसी क्रम से धन गल्ले में डाले तो वह पचीसवें अठवारे को कितना धन गल्ले में डालेगा ॥

(१२) एक ऋणी ने अपना ऋण २५ अठवारों में इस रीति से चुकाया है कि पहिले अठवारे को उसने अपने धनी को २ आने दिये और दूसरे अठवारे को ५ आने और तीसरे अठवारे को ८ आने इसी क्रम से उस ऋणी ने अपने धनी का सब ऋण २५ अठवारों में चुका दिया तो बतलाओ कि उस को कितना ऋण चुकाना था ॥

(१३) दिन के २२ बजे से रात्रि के २२ बजे तक १२ घण्टे बजते हैं तो बतलाओ कि इतने समय में घण्टे पर कितनी मोंगरियां पड़ी होंगी. तुम यह अच्छी रीति से जानते हो कि जब एक बजता है तो घण्टे पर केवल एक मोंगरी पड़ती है और जब दो बजते हैं तो घण्टे पर दो मोंगरी लगानी होती हैं इसी रीति

हेजे घटे बजाने होते हैं उतनीही मोंगरियां घटे पर लगाते हैं ॥

(१४) २०० पत्थर की कत्तली को एक सीध में दो २ हाथ के अन्तर से रक्वा और उसी सीध में पहिली कत्तल से ६० हाथ दूर एक डलिया रक्वी फिर एक मनुष्य डलिया के पास से चलकर पहिली कत्तल के पास जो ६० हाथ दूर थी उस कत्तल को उठाके लोटकर डलिया में धर गया और फिर डलिया के पास से चलकर दूसरी कत्तल के पास आया जो पहिली कत्तल से २ हाथ दूर पर रक्वी थी इसे लोट कर डलिया में रख गया इसी रीति से उस मनुष्य ने डलिया जहां रक्वी थी वही रहने दी और उस के पास चलकर क्रम से सब कत्तलों को बढोर कर उसी डलिया में रख दी तो बतलाओ कि यह मनुष्य को इस एरा फेरी में कितना चलना पड़ा

(१५) गुणोत्तर श्रेणी के  $\frac{1}{2}$  और  $\frac{1}{3}$  ये दो पहिले पद हैं तो बतलाओ कि गुणोत्तर क्या है और श्रेणी का तीसरा पद कौन सा है ॥

(१६)  $\frac{1}{2}$  और  $\frac{1}{3}$  इन के बीच गुणोत्तर श्रेणी का मध्य पद क्या होगा और उन ही दोनों भिन्नो के बीच अन्तर श्रेणी का मध्य पद क्या होगा ॥

(१७) १ और ३ इन के बीच के ३ योगन श्रेणी के मध्य पद बतलाओ ॥

(१८) १०० और ८० इन के बीच के ४ अन्तर श्रेणी के मध्य पद बतलाओ ॥

(१९) ५ और ३२० इनके बीच के २ गुणोत्तर श्रेणीके मध्य पद निकालो ॥

(२०) १०० और २३४ इनके बीच के ३ गुणोत्तर श्रेणीके मध्य पद निकालो ॥

(२१) एक ऋणी ने अपना ऋण चुकाने का यह वन्दान किया कि उसने पहिले शठवारे को ५ आने दिये और दूसरे शठवारे को ८ आने दिये इसी रीतिसे उसने प्रत्येक शठवारे में क्रमसे ३ आने की बढ़तीसे ऋण चुकाया और उसने अन्त के शठवारे को १८ ॥=) आना दिये तो बतलाओ कि उसने कितना ऋण कितने शठवारों में चुकाया ॥

(२२) एक व्यापारी ने व्यापार किया तो पहले वर्ष में उसे केवल १००) नफ़ा के मिले और दूसरे वर्ष में १३०) नफ़ा के मिले तीसरे वर्ष में १६०) नफ़ा के मिले इसी क्रमसे हर वर्ष में उसे ३०) नफ़ा के अधिक मिले और अन्त वर्ष में उसे ५५०) नफ़ा के मिले तो बतलाओ कि उसने कौ वर्ष व्यापार किया ॥

(२३) एक जमींदार ने १० सेर गेहूं बोये और फसल में जो गेहूं हुआ उन को अगले वर्ष में बोये और दूसरी फसल में जो गेहूं हुआ वे तीसरे वर्ष में बोये फिर तीसरी फसल के गेहूंओं को चौथे साल में बोया तो चौथी फसल में २२६५ ६ ३/४ मन गेहूं हुआ और पहिली फसल में गेहूं बीज के गेहूं से जै गुने उत्पन्न हुआ उतने ही गुने गेहूं हर फसल में बीज के गेहूं से उत्पन्न हुआ तो

बतलाओ कि हर फल के गेहूं बीज के गेहूं से कितने गुने अधिक उत्पन्न हुए ॥

(२४) गति विद्या में यह लिखा है कि जो कोई पदार्थ ऊपर से नीचे को गिरे तो वह पहिले से कण्ड वा  $२\frac{1}{2}$  विपल में क़रीब  $१६\frac{1}{2}$  फुट के गिरेगा और दूसरे सेकण्ड में  $१६\frac{1}{2} + ३२\frac{1}{2}$  फुट गिरेगा और तीसरे सेकण्ड में  $१६\frac{1}{2} + ३२\frac{1}{2} + ३२\frac{1}{2}$  फुट गिरेगा इसी क्रम से वह पदार्थ अत्येक सेकण्ड में  $३२\frac{1}{2}$  फुट की बढ़ती से गिरेगा और हवा में ऊपर बुर्ज चढ़ा या उसमें से कुछ भारी वजन नीचे को गिरा और वह २० सेकण्ड में धरती पर आ पहुंचा तो बतलाओ कि ऊपर जो हिसाब लिखा है उसके अनुसार बुर्ज धरती से कितना ऊंचा होगा स्मरण रखो कि इस गणित में हवा की रोक का कुछ परिमाण नहीं लिखा है ॥

### ॥ मिश्र प्रश्न ॥

नीचे जो बीजात्मक राशि लिखी हैं उन कालक्षतय रूपको

(१)  $(२ग-३र)य-(ग-२)व-(ग-२र)य-य$  ॥

(२)  $(व-क)य-(व+क)व+३कय-२य$  ॥

(३)  $(अ-२प)य+(अ+२प)य-(प-अ)य-य$  ॥

(४) बतलाओ कि  $\frac{२}{अ-क}$  यह  $\frac{२}{अ-क}$  इस के तुल्य है ॥

(५) बतलाओ कि  $\frac{अ-क}{य}$  यह  $\frac{अ-क}{य}$  इस के तुल्य है ॥

(६) जो अ=क=-ग वा अ, क, -ग ये तीनों राशियात्मक

हैं तो वतलाओ कि  $\frac{अक^२ - २अक + ग^२}{क^२ - ३कग + ग^२}$  इस का क्या मान है ॥

(७)  $२(अ+क) - ३(ग-घ)$  इसमें से  $अ+क - ४(ग-घ)$  इसको घटाओ ॥

(८)  $(अ+क)य + (क+ग)र$  इसमें से  $(अ-क)य - (क-ग)र$  इसको घटाओ ॥

(९)  $\frac{२य}{क}$  इसमें से  $\frac{५}{२}ग - \frac{अ}{क}$  इसको घटाओ ॥

(१०)  $\frac{य+५}{४(य-१)}$  इसमें से  $\frac{५य-२५}{४(य-१)}$  इसको घटाओ ॥

(११)  $\frac{न}{न+१}$  और  $\frac{न^२}{न+२}$  इनका योग करो ॥

(१२)  $\frac{य}{२} + \frac{य}{३}$  इनको हल्ले गुण दो ॥

(१३)  $१ + य$  इसमें  $\frac{१}{२} + १$  इसका भाग दो ॥

(१४)  $अ^३ + ४क^३$  इसमें  $अ^२ - २अक + २क^२$  इसका भाग दो ॥

(१५)  $७य + य - ५य - ३य$  इसमें  $१ - ३य$  का भाग दो ॥

(१६)  $अ+क + \frac{अ}{क}$  इसमें  $अ+क + \frac{क}{अ}$  इसका भाग दो ॥

(१७)  $अ - \frac{१}{३}$   $(अ - \frac{१}{३}क)$  इसमें  $क - \frac{१}{३}(अ + \frac{१}{३}क)$  इसका भाग दो ॥

(१८)  $य + १ + \frac{१}{२}$  इसको  $य - १ + \frac{१}{२}$  इस्से गुण दो ॥

(१९)  $अ^३ - \frac{१}{३}$  इसमें  $अ - \frac{१}{३}$  इसका भाग दो ॥

(२०)  $\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x$  इसका वर्ग करो ॥

(२१)  $(\sqrt{y} + \sqrt{x}) (y - \sqrt{xy}) (\sqrt{y} - \sqrt{xy} + \sqrt{x})$

$(\sqrt{x} + y)$  इस क्रम से गुणन का घात निकालो ॥

(२२)  $\sqrt{xy} - k$  इसमें  $\sqrt{xy} - \sqrt{k}$  इसका भाग लो ॥

(२३)  $\frac{1}{2} \frac{2x+3r}{2x-3r}$  और  $\frac{1}{2} \frac{2x-3r}{2x+3r}$  इन का योग करो ॥

(२४)  $\frac{y(y+1)(y+2)}{3} \cdot \frac{y(y+1)(2y+1)}{2 \times 2 \times 3}$  ॥

॥ नीचे जो समीकरण लिखे हैं उनमें अव्यक्त राशि का मान बतलाओ ॥

(२५)  $\frac{30}{y+2} = \frac{24}{y-2}$  ॥

(२६)  $\frac{22x}{2x-8} = \frac{22x}{2x-8}$  ॥

(२७)  $\frac{82y}{y-2} = \frac{34y}{y-3}$  ॥

(२८)  $\frac{y-4}{3} = \frac{y+3}{8}$  ॥

(२९)  $\frac{3}{y+2} = 6-2$  ॥

(३०)  $\frac{3}{1-2y} - \frac{8}{1-2y} = \frac{5}{y-2}$  ॥

(३१)  $\frac{1}{y+3} + \frac{2}{y+4} = \frac{3}{y+6}$  ॥



$$(३२) \frac{२}{४} \left[ ३य - \frac{२}{५} (य - २) \right] = \frac{५}{४} य - १ ॥$$

$$(३३) \frac{य - ३}{२य} - \frac{य - ४}{\frac{१०}{५}} = \frac{१४ - य}{५} ॥$$

$$(३४) \frac{२य - १}{२य + २} + \frac{२य + २}{२य - २} = ३ ॥$$

$$(३५) \frac{४य}{य + ३} = \frac{१६५}{य + २०} - ५ ॥$$

$$(३६) ३ \left( य - \frac{२}{४} \right) - \frac{य - २}{य + २} = ५ ॥$$

$$(३७) \frac{१२}{५ - य} + \frac{१}{३ - य} = \frac{४}{२ + य} ॥$$

$$(३८) \frac{७य + २}{\frac{१२}{५} - ३य} = \frac{८०}{३} \left( \frac{य - २}{य - \frac{१०}{५}} \right) ॥$$

$$(३९) \frac{२}{३} (य - २) (य - २) = \frac{२}{३} (य - २ \frac{२}{३}) ॥$$

$$(४०) \frac{२}{३} (य + ३) (२य - ५) = \frac{६२}{५} \left( २य - \frac{१०}{५} \right) ॥$$

$$(४१) \frac{२य (३य - य)}{३य - २य} = \frac{या}{४} ॥$$

$$(४२) \frac{५ + ३य + ६}{य + य - ४} = \frac{२}{५} + २य + १५ ॥$$

$$(४३) \left. \begin{array}{l} २३य + २३५२ = ३७४ \\ २२३य + २००२ = २६०० \end{array} \right\}$$

(४४)  $\left. \begin{aligned} ११x + १०r &= १०१ \\ २०x - ३७r &= ५ \end{aligned} \right\}$

(४५)  $\left. \begin{aligned} ५०x + २७r &= ४७ (x+r) \\ १०r + ८३r &= १७ (x-r) \end{aligned} \right\}$

(४६)  $\left. \begin{aligned} ९x + ३r &= २३ (x+r) \\ ५(x+r) &= ५ (x-r) \end{aligned} \right\}$

(४७)  $\left. \begin{aligned} ७\left(\frac{१}{३}x - १\right) &= \frac{३}{७}(r+१) - \frac{१}{३} \end{aligned} \right\}$

$\frac{१}{३}(r-५) = \frac{३}{७}\left(\frac{२}{३} - \frac{१}{३}x\right)$

(४८)  $\left. \begin{aligned} \frac{x+r}{r+r} &= \frac{१}{३} \\ \frac{x-r}{r-३} &= \frac{१}{३} \end{aligned} \right\}$

(४९)  $\left. \begin{aligned} \frac{x+r}{r+r} &= \frac{१}{३} \\ \frac{x-३}{r+३} &= \frac{१}{३} \end{aligned} \right\}$

(५०)  $\left. \begin{aligned} \frac{x+७}{३} &= \frac{१}{३} \\ \frac{x}{r+१०} &= \frac{१}{३} \end{aligned} \right\}$

(५१)  $\left. \begin{aligned} \frac{x}{३} + x + xr &= १३ \\ x &= ६ \end{aligned} \right\}$

(५२) जल में १ बांस गड़ा था उस का  $\frac{1}{2}$  भाग जल में धरती के नीचे गड़ा था और उस का  $\frac{1}{3}$  भाग जल के भीतर था और १३ हाथ जल से ऊपर था तो बतलाओ कि बांस कितने हाथ लम्बा था ॥

(५३) दो मनुष्य साजी थे उन में पहला मनुष्य  $\frac{1}{2}$  भाग का साजी था और दूसरा मनुष्य  $\frac{1}{3}$  भाग का साजी था और दूसरे मनुष्य का जितना रुपया साजियों लगाया उसके १००० अधिक पहले मनुष्य का साजे का धन था तो बतलाओ कि साजे का सर्व धन क्या होगा ॥

(५४) एक मण्डली में सब पुरुष स्त्रियां और लड़के मिलकर ८० थे और ४ पुरुष स्त्रियों से अधिक थे और जितने पुरुष और स्त्रियां मिलकर थी उन से १० अधिक लड़के थे तो बतलाओ कि कितने पुरुष, कितनी स्त्रियां और कितने लड़के थे ॥

(५५) एक पुरुष की अब ४० वर्ष की अवस्था है और उसके पुत्र की ८ वर्ष की अवस्था है तो अब पिता की अवस्था पुरुष की अवस्था से ४ गुनी अधिक है तो बतलाओ कि कितने वर्ष पीछे पिता की अवस्था लड़के की अवस्था से केवल दूनी रह जायगी ॥

(५६) दो वट्टियों ने मिलकर काम किया और उस को ७५ मजदूरी के मिले और उन में १ मनुष्य ने २५ दिन काम किया और दूसरे ने २४ दिन और जो पहले मनुष्य की ४ दिन में मिला इस से २१ रुपये

कन दूसरे मनुष्य को ३ दिन में मिला तो बतलाओ कि  
हर मनुष्य को क्या रोज मिला होगा ॥

(५७) ७ घोड़े और ४ गाय ने मिलकर एक घास के  
ढेर को १० दिन में खा डाला और जो केवल २ घोड़े उ  
सी ढेर को ४० दिन में खा जाते तो बतलाओ कि केवल  
२ गाय वैसे ढेर को कितने दिन में खायगी ॥

(५८) एक बुद्धिमान मनुष्य से पूछा कि कहो जो  
तुम्हारी तुम्हारे पिता की और तुम्हारे दादाजी की कि  
तनी २ अवस्था हैं उसने उत्तर दिया कि मेरी अवस्था  
और मेरे पिता की अवस्था मिलकर ५६ वर्ष के समान  
है और मेरी अवस्था और मेरे दादाजी की अवस्था ८०  
वर्ष के बराबर है और मेरे पिता की अवस्था और मेरे  
दादाजी की अवस्था १०० वर्ष के समान है तो बतलाओ  
कि तीनों पुरुष की न्यारी २ कितनी अवस्था होगी ॥

(५९) एक लड़के ने ५ आने के सड़तरे और मीठे  
मोल लिये और एक सड़तरा आध आने का पड़ा और  
एक सीरा ४ पाई को पड़ा पर उसने दामों के दाम को  
३ भाग वे सड़तरे और आधे मीठे ३ आने को बँच  
दिये तो बतलाओ कि उस लड़के ने कितने सड़तरे  
मोल लिये और कितने मीठे ॥

(६०) एक मैदा वाले ने बहत अच्छी ४ मन सूजी की  
मन ५) के भाव की बनाई परन्तु जब उसने देखा कि  
सूजी का भारी मोल सुनकर खरीदार चौंक जाते हैं तो  
उसने यह उपाय किया कि उस बोखी ४ मन सूजी में  
मन १॥) भाव का बोखा खा मिला दिया फिर इस

(६८) सन्दूक के तीनों खानों में १६२ रुपये रखे कि हर एक खाने में बराबर रखने के लिये दूसरे और तीसरे खानों में जितने २ रुपये थे उन के आधे २ रुपये पहले खाने में से निकाल कर दूसरे और तीसरे खानों के रुपयों में मिला दिये फिर इस रीति से पहले और तीसरे खानों में जितने २ रुपये हो गये उन आधे आध रुपये दूसरे खाने में से निकाल कर पहले और तीसरे खानों के रुपयों में मिला दिये और फिर तब पहले और दूसरे खानों में जितने २ रुपये हो गये उन के आधे २ रुपये तीसरे खाने से निकाल कर पहले और दूसरे खानों के रुपयों में मिला दिये तब पीछे तीनों खानों में बराबर रुपये होगये तो बतलाओ कि पहले हर एक खाने में कितने २ रुपये रखे

(६९) एक मनुष्य ने दरयाई कपड़ा कई गज १५ रुपये को खरीदा और दूसरे मनुष्य ने १५ ही रुपये पहले मनुष्य की अपेक्षा २ गज कम दरयाई कपड़ा मोल लिया इस लिये इस मनुष्य को २ आने गज के मोल सिवाय देने पड़े गो बतलाओ कि पहले मनुष्य ने कितने गज कपड़ा खरीदा होगा ॥

(७०) १०० के रैमे खण्ड करो कि उन खण्डों के बराबर का अन्तर ४०० है ॥

(७१) दो ऐसे भिन्न हैं कि उन का योग  $\frac{६२}{६३}$  है और उन का अन्तर  $\frac{१}{६३}$  और उन्हीं भिन्नों के अंशों का योग १ है और उन के हरों का योग २६ है तो बतलाओ कि वे दो भिन्न हैं ॥

(७२) एक मनुष्य के पैरों में चलने २ छाले पड़ गये और जब वह बदाऊं से चला तो वह पहले दिन बड़ी मुश्किल से १ कोस चला और फिर ठिक रहा और दूसरे दिन ३ कोस चलकर रह गया और तीसरे दिन ५ कोस चलकर ठिक रहा इसी रीति से वह मनुष्य २ कोस की बढ़ती से चला, अब इस मनुष्य को ३ दिन बदाऊं से चले हो गये तिस पीछे एक दूसरा मनुष्य उसी राह बदाऊं से चला और वह पहले दिन १२ कोस आया दूसरे दिन १३ कोस चला इस क्रम से वह मनुष्य हर दिन २ कोस की बढ़ती से चला तो बतलाओ कि पहिले उल दोनों मनुष्यों को भेड़ राह में कौन से दिन हुई और किस दिन उन दोनों को चाल बराबर हो गई और जिसके उपरान्त किस दिन पहले मनुष्य की चाल दूसरे मनुष्य की चाल से अधिक हो गई और जिस दिन वे बराबर चले उस दिन कितने कोस चले ॥

(७३) एक शाला में लड़कों के ३ वर्ग वा दफ्तर थीं उन में जो विद्यार्थी थे, उन की संख्या में ऐसा सम्बन्ध था जो ५, ७, और ८ इन संख्याओं में है एक वर्ष पीछे उस शाला के पहिले वर्ग में जितने पहिले लड़के थे उन से चार और लड़के अधिक हो गये और दूसरे वर्ग में जितने लड़के थे उन के दो सप्तमांश और बढ़ गये और तीसरे वर्ग में जितने लड़के थे उन के दूने हो गये और तीनों वर्गों में सब लड़के मिलकर ८४ हो गये तो बतलाओ कि पहिले तीनों वर्गों में कितने लड़के थे ॥

(७४) चांदी का सजातीय गुरुत्व  $20\frac{2}{3}$  है और तांबे का सजातीय गुरुत्व ९ है और तांबे मिले चांदी का सजातीय गुरुत्व  $2\frac{2}{3}$  है तो बतलाओ कि १४८ तांबे मिली चांदी में कितनी चांदी होगी और कितना तांबे

(७५) जो अः कः गः और जो कः गः गः घः तो बतलाओ कि अः घः अः कः और अ + कः क + गः क + गः ग + घ ॥

(७६) जो ह्य-अः ह्य-कः अ + कः अ + अ तो बतलाओ कि अ किस के तुल्य होगा ॥

(७७) जो अः कः गः घ तो बतलाओ कि अः अ + कः अ + गः अ + क + ग + घ ॥

(७८) २० के ऐसे तीन खण्ड करो कि पहिले और दूसरे खण्ड का सम्बन्ध २ : ५ इस सम्बन्ध के समान हो और दूसरे और तीसरे खण्ड का सम्बन्ध ५ : ३ इस सम्बन्ध के तुल्य हो ॥

(७९) ऐसी ही संख्या कौन सी हैं कि उन का सम्बन्ध  $2\frac{2}{3} : 2\frac{3}{5}$  इस सम्बन्ध के समान हो और जो उन दोनों संख्याओं में १ जोड़ दें तो उन का सम्बन्ध  $2\frac{2}{3} : 2\frac{3}{5}$  इस सम्बन्ध के समान हो ॥

(८०) गोल के घन फल और उस के व्यास के घन में क्रम रूपान्तर सम्बन्ध है अर्थात् एक गोल का घन फल दूसरे गोल के घन फल से यह सम्बन्ध रहेगा जो पहले गोल का व्यास दूसरे गोल के व्यास से रखना होगा तो जो एक गोल का ४ अंगुल का व्यास है और दूसरे गोल का ७ अंगुल का व्यास हो तो

बतलाओ कि उन दोनों गोल के घन फलों में क्या सम्बन्ध होगा ॥

(८१) दर्शनानुशासन विद्या में यह लिखा है कि स्व प्रकाश पदार्थों के प्रकाश के परिमाण और उन के अंतर वा दूरी के वर्ग में उत्क्रम रूपान्तर का सम्बन्ध रहता है अर्थात् जो कोई पदार्थ स्वप्रकाश जैसा सूर्य अग्नि आदि से जो अधिक दूर होगा तो उसको स्वप्रकाश पदार्थ का उजाला भी पूर्वोक्त गणित से कम दिखाई देगा, एक दीये से ८ गांगुल के अंतर पर एक पुस्तक धरी है तो बतलाओ कि उस पुस्तक को कितनी दूर और हटाकर रखें जिसे पुस्तक पर पहले से था उजाला पड़े ॥

(८२) यदि घन क्षेत्र जैसा गोल लाठी गोल लेखनी जैसी सीधी एक सी मोटी है आदि के घन फल में और उस की उच्छ्रिति वा ऊंचाई और उसके आधार वा एक छोर के वृत्त के व्यास के वर्ग इन के घात में क्रम रूपान्तर का सम्बन्ध रहता है वा जो उच्छ्रिति और व्यास का वर्ग इन का घात में गुना चढ़ेगा वा बढ़ेगा उतने ही गुना घन फल भी घरेगा वा बढ़ेगा तो बतलाओ कि जब एक यदि घन क्षेत्र की ऊंचाई दूसरे यदि घन क्षेत्र की ऊंचाई से दूनी हो परन्तु उस का व्यास दूसरे यदि घन क्षेत्र के व्यास से आधा हो तो उन दोनों यदि घन क्षेत्रों के घन फलों में क्या सम्बन्ध होगा ॥

(८३) एक बनिषे ने पाहले महीने में ६ पाइ के अरुधान महीने में कौदियां डाक्री और दूसरे महीने में



१ पाई गल्ले में डाली और तीसरे महीने में ४ पाई गल्ले में डाली इसी रीति से उसने चौथी वृद्धि से धन गल्ले में १२ महीने तक डाला तो बतलाओ कि गल्ले में १२ महीने में कितना धन इकट्ठा हुआ होगा ॥

(८४) चार नगरी के मनुष्यों की संख्या इस क्रम से है कि पहिली नगरी में ५३०० मनुष्य हैं दूसरी नगरी में २६४० मनुष्य हैं तीसरी नगरी में १८७० मनुष्य हैं और चौथी नगरी में ६८० मनुष्य हैं तो बतलाओ कि जो २५० जवान पुलिस के इन नगरियों में चौकसाई के लिये भेजे जाय तो हर नगरी में उन मनुष्यों की संख्या के अनुसार कितने २ सिपाही भेजे जायगे ॥

(८५) धातु के दो गोल हैं उन में पहिले गोल का ६ अंगुल का व्यास है और दूसरे गोल का ७ अंगुल का व्यास है तो बतलाओ कि जो उन धातों के दोनों गोल को धूलों के एक गोल बनावे तो इस गोल का कितना व्यास होगा परन्तु यह स्मरण रखो कि दो गोल के धन फलों में और उन के व्यास के घनों में क्रम रूपान्तर का सम्बन्ध रहता है वा जितना व्यास का घन जैशुना बढ़ जायगा वा घट जायगा उतने ही घना घन फल भी बढ़ जायगा वा घट जायगा ॥

(८६) सम्वत् १६०० में कार्तिक शुदी पड़वा को एक धनी ने गरीब ब्राह्मण को इतना प्रणय किया कि वह जितने वर्ष की धनी की अवस्था थी उस संख्या के ४ गुनी पाइयों के तुल्य था और फिर दूसरे सम्वत् १६०१ में कार्तिक शुदी पड़वा को उस धनी ने उसी गरीब ब्राह्मण

को इतना धन पुण्य में दिया कि वह जितने वर्ष की अवस्था धनी की उस सम्वत् में थी उस संख्या के ४ गुनी या इधों के तुल्य था इसी रीति से उस धनी ने उनी धीन प्राप्त्या को १६०७ तक पुण्य किया और तिस पीछे मर गया तो वतलाओ कि उस धनी ने सब कितना धन पुण्य किया और जब वह मर गया तब उस की क्या अवस्था होगी और उस का जन्म कौन से सम्वत् में हुआ होगा

॥ १ अवस्था के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१)	y = १२ r = ५	}	(१)	y = २ r = ३	}
(२)	y = १० r = २		(२)	y = ११ r = ७	
(३)	y = ६ r = २	}	(३)	y = १ r = ५	}
(४)	y = ३ r = १		(४)	y = ५ r = ४	
(५)	y = १ r = २	}	(५)	y = १० r = ७	}
(६)	y = ७ r = १०		(६)	y = ५ r = ३	
(७)	y = ४ r = ३	}	(७)	y = ६ r = १०	}
(८)	y = २ r = ३		(८)	y = ३ r = १०	

$$(१७) \quad \left. \begin{array}{l} y = 3 \\ r = \frac{8}{3} \end{array} \right\}$$

$$(१८) \quad \left. \begin{array}{l} y = 6 \\ r = 2 \end{array} \right\}$$

$$(१९) \quad \left. \begin{array}{l} y = 6 \\ r = 6 \end{array} \right\}$$

$$(२०) \quad \left. \begin{array}{l} y = 6 \\ r = 6 \end{array} \right\}$$

॥ २ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं  
उन के उत्तर लिखते हैं ॥

$$(१) \quad \left. \begin{array}{l} y = 2 \\ r = 2 \end{array} \right\}$$

$$(२) \quad \left. \begin{array}{l} y = 11 \\ r = 6 \end{array} \right\}$$

$$(३) \quad \left. \begin{array}{l} y = 6 \\ r = 8 \end{array} \right\}$$

$$(४) \quad \left. \begin{array}{l} y = 6 \\ r = \frac{2}{3} \end{array} \right\}$$

$$(५) \quad \left. \begin{array}{l} y = 8 \\ r = 31 \end{array} \right\}$$

$$(६) \quad \left. \begin{array}{l} y = 114 \\ r = 216 \end{array} \right\}$$

$$(७) \quad \left. \begin{array}{l} y = 688 \\ r = 77 \end{array} \right\}$$

$$(८) \quad \left. \begin{array}{l} y = 8 \\ r = 16 \end{array} \right\}$$

$$(९) \quad \left. \begin{array}{l} y = 4 \\ r = 6 \end{array} \right\}$$

$$(१०) \quad \left. \begin{array}{l} y = 23 \\ r = 3 \end{array} \right\}$$

$$(११) \quad \left. \begin{array}{l} y = 7 \\ r = 10 \end{array} \right\}$$

$$(१२) \quad \left. \begin{array}{l} y = 7 \\ r = 8 \end{array} \right\}$$

॥ ३ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं  
उन के उत्तर लिखते हैं ॥

$$(१) \quad 22 \text{ और } 26$$

$$(६) \quad \frac{2}{3}$$

$$(२) \quad 24 \text{ और } 34$$

$$(७) \quad 24 \text{ और } 6$$

$$(३) \quad 24 \text{ पुरुष और } 20 \text{ स्त्री}$$

$$(८) \quad 22 \text{ और } 10$$

$$(४) \quad 23 \text{ पुरुष और } 22 \text{ स्त्री}$$

$$(९) \quad 12 \text{ सेर और } 4 \text{ सेर}$$

$$(५) \quad \frac{1}{2}$$

$$(१०) \quad 10 \text{ और } 12 \text{ ईसवी}$$

॥ ४ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं  
उनके उत्तर लिखते हैं ॥

- |                                           |                                           |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| (१) $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$  | (११) $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ |
| (२) $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$  | (१२) $2x^2 + 2 + 2x$                      |
| (३) $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$  | (१३) $2x^2 + 2 + 2x$                      |
| (४) $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$  | (१४) $2x^2 + 2 + 2x$                      |
| (५) $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$  | (१५) $2x^2 + 2 + 2x$                      |
| (६) $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$  | (१६) $2x^2 + 2 + 2x$                      |
| (७) $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$  | (१७) $2x^2 + 2 + 2x$                      |
| (८) $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$  | (१८) $2x^2 + 2 + 2x$                      |
| (९) $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$  | (१९) $2x^2 + 2 + 2x$                      |
| (१०) $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ | (२०) $2x^2 + 2 + 2x$                      |

॥ ५ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं  
उनके उत्तर लिखते हैं ॥

- |                     |                      |                      |
|---------------------|----------------------|----------------------|
| (१) $2x^2 + 3x + 1$ | (६) $2x^2 + 3x + 1$  | (११) $2x^2 + 3x + 1$ |
| (२) $2x^2 + 3x + 1$ | (७) $2x^2 + 3x + 1$  | (१२) $2x^2 + 3x + 1$ |
| (३) $2x^2 + 3x + 1$ | (८) $2x^2 + 3x + 1$  | (१३) $2x^2 + 3x + 1$ |
| (४) $2x^2 + 3x + 1$ | (९) $2x^2 + 3x + 1$  | (१४) $2x^2 + 3x + 1$ |
| (५) $2x^2 + 3x + 1$ | (१०) $2x^2 + 3x + 1$ | (१५) $2x^2 + 3x + 1$ |

- |                                        |                                            |
|----------------------------------------|--------------------------------------------|
| (१५) $y + १५y + \frac{१२२}{५}$         | (२०) $y + \frac{२}{३}y + \frac{२१५}{१००}$  |
| (१६) $y + २y + १$                      | (२१) $y + \frac{२}{३}y + \frac{२१५}{१००}$  |
| (१७) $y - y + \frac{२}{५}$             | (२२) $y + \frac{२}{३}y + \frac{२१५}{१००}$  |
| (१८) $y + \frac{४y}{२} + \frac{४}{२५}$ | (२३) $y - \frac{२१५}{५} + \frac{४५५}{१००}$ |
| (१९) $y - \frac{२y}{७} + \frac{१}{४८}$ | (२४) $y - \frac{७y}{२०} + \frac{४५५}{१००}$ |

॥ ६ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं  
उन के उत्तर लिखते हैं ॥

- |                 |                 |                                           |
|-----------------|-----------------|-------------------------------------------|
| (१) $y = \pm ६$ | (५) $y = \pm २$ | (९) $y = \pm \frac{१}{३}$                 |
| (२) $y = \pm ४$ | (६) $y = \pm ५$ | (१०) $y = \pm ३$                          |
| (३) $y = \pm १$ | (७) $y = \pm ५$ | (११) $y = \pm ३$                          |
| (४) $y = \pm ४$ | (८) $y = \pm ३$ | (१२) $y = २\frac{१}{५}$ वा $\frac{११}{५}$ |

॥ ७ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं  
उन के उत्तर लिखते हैं ॥

- |                     |                      |                               |
|---------------------|----------------------|-------------------------------|
| (१) $y = ५$ वा $-२$ | (४) $y = २०$ वा $-६$ | (७) $y = ६$ वा $१$            |
| (२) $y = ४$ वा $१$  | (५) $y = २$ वा $१०$  | (८) $y = ६$ वा $-५$           |
| (३) $y = ८$ वा $२$  | (६) $y = २$          | (९) $y = १\frac{१}{३}$ वा $२$ |

- |                                             |                                            |
|---------------------------------------------|--------------------------------------------|
| (१०) $y = ६$ वा $-४\frac{१}{३}$             | (१६) $y = १\frac{१}{३}$ वा $-\frac{११}{३}$ |
| (११) $y = ६$ वा $-२०\frac{१}{३}$            | (१७) $y = २$ वा $-२\frac{१}{३}$            |
| (१२) $y = १\frac{१}{३}$ वा $\frac{३}{१०}$   | (१८) $y = २$ वा $-१\frac{१}{३}$            |
| (१३) $y = \frac{२}{३}$ वा $-३$              | (१९) $y = ४$ वा $-२$                       |
| (१४) $y = ६$ वा $-१०\frac{१}{३}$            | (२०) $y = ७$ वा $-\frac{१}{३}$             |
| (१५) $y = ६$ वा $-५\frac{१}{३}$             | (२१) $y = १\frac{१}{३}$ वा $-\frac{१}{३}$  |
| (१६) $y = १\frac{१}{३}$ वा $-\frac{२५}{२०}$ | (२२) $y = \frac{२}{३}$ वा $-१\frac{१}{३}$  |
| (१७) $y = २$ वा $\frac{१}{३}$               | (२३) $y = २$ वा $-३$                       |
| (१८) $y = २\frac{१}{३}$ वा $-२$             | (२४) $y = २$ वा $\frac{१}{३}$              |

- |                               |                                |
|-------------------------------|--------------------------------|
| (२९) य = २ वा - $\frac{१}{३}$ | (३४) य = ३ वा - $\frac{२}{१२}$ |
| (३०) य = २ वा - $\frac{२}{३}$ | (३५) य = ३ वा - $\frac{३}{१२}$ |
| (३१) य = २ वा - $\frac{१}{३}$ | (३६) य = ४ वा - $\frac{१}{१२}$ |
| (३२) य = ३ वा - $\frac{४}{५}$ | (३७) य = १ वा - $\frac{१}{५}$  |
| (३३) य = ४ वा - $\frac{१}{३}$ | (३८) य = २ वा - $\frac{१}{३}$  |
| (३३) य = ७ वा - $\frac{१}{७}$ | (३९) य = ८ वा - $\frac{१}{८}$  |
|                               | (४०) य = २ वा - $\frac{१}{१२}$ |

॥ ८ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

- |                                                                                          |                                            |                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------|
| (१) य = ± ४ }<br>र = ± २ } (३)                                                           | य = ± ८ }<br>र = ± १० } (३)                | य = ± १२ }<br>र = ± ३ } (३) |
| (४) य = ८ वा - $\frac{३}{२}$ }<br>र = ३ वा - ८ } (४)                                     | (५) य = ५ वा - ६ }<br>र = ३ वा - ५ } (५)   |                             |
| (६) य = $\frac{२}{३}$ वा - $\frac{१}{६}$ }<br>र = $\frac{१}{६}$ वा - $\frac{१}{३}$ } (६) | (७) य = २ वा - २ }<br>र = ३ वा - ५ } (७)   |                             |
| (८) य = १ वा - १३ }<br>र = ३ वा - ११ } (८)                                               | (९) य = ३ वा - ३ }<br>र = २ वा - ३ } (९)   |                             |
| (९) य = २ वा - $\frac{१}{३}$ }<br>र = ४ वा - १ } (९)                                     | (१०) य = २ वा - ५ }<br>र = ६ वा - ६ } (१०) |                             |
| (१०) य = ६ वा - १ }<br>र = ६ वा - १ } (१०)                                               | (११) य = ६ वा - ६ }<br>र = ६ वा - ६ } (११) |                             |

॥ १९ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं  
उनके उत्तर लिखने हैं ॥

- (१) २२ और २३ (६) २४ और २६ (७) ८ और १८  
(२) ३, ४, ५ (५) १२ और १३ (८) २३  
(३) ४ और १६ (६) २० और २१ (९)  $\frac{३}{२}$

- (१०) २३ कोस और २२ कोस (२३) ५५ और ४८  
की घंटा (२४) २८ कोस और  
(२१) प्रति घंटा ६ कोस २२ कोस  
(२२) २५ और २० (२५) ४ गज और ५ गज ॥

॥ २० अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं  
उनके उत्तर लिखने हैं ॥

- (१)  $\frac{३}{५}$  (८)  $\frac{५}{६४}$  (१०) २४५:५२  
(२)  $\frac{१}{५५}$  (९)  $\frac{अ+क}{ग}$  (११) (न-२)य:२अ  
(३)  $\frac{अ}{क}$  (१०)  $\frac{२अ+अ}{न}$  (१६) १६:२७  
(४)  $\frac{अ}{२}$  (११)  $\frac{१+अ}{२}$  (१७) ३अ:२क  
(५)  $\frac{अर}{२}$  (१२)  $\frac{अ-क}{१}$  (१८) अ-य = अक  
(६)  $\frac{१क}{२अ}$  (१३) ५ और ४ (१९)  $२ = २अय - य$   
(७)  $\frac{अम}{२य}$  (१४) ८ र:२य (२०) ६:२  
(१५) ७अ:३क (२१) ४ और ६  
(१६) ८ र:२य (२२) ३ क र  
(१७) ७अ:३क (२३) २५ और २०  
(१८) ८ र:२य (२४) ८ र:३अय  
(१९) ७अ:३क (२५) ८ र:२य (२६) ८ =  $\frac{५}{५}$

॥ ११ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

- |                                                              |                                                    |
|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| (१) ११ और ६६                                                 | (१३) ७०                                            |
| (२) १२ और ३                                                  | (१४) ५२००० गज                                      |
| (३) $\frac{१}{३}$ और $\frac{५}{३}$                           | (१५) $\frac{१}{३}$ और $\frac{३}{४}$                |
| (४) ४००                                                      | (१६) $\frac{१३}{७२}$ और $\frac{१}{६}$              |
| (५) ६७०                                                      | (१७) $\frac{१}{५}$ , $\frac{२}{५}$ , $\frac{३}{५}$ |
| (६) ३६००                                                     | (१८) ६६, ६४, ६८, ६४                                |
| (७) १५५४                                                     | (१९) २०, ६०,                                       |
| (८) ५६५                                                      | (२०) ४०, १६, ६ $\frac{१}{५}$                       |
| (९) $\frac{१६}{३}$                                           | (२१) १०० अठवारे और ६५६६                            |
| (१०) $\frac{१६६६}{३०}$                                       | (२२) १६                                            |
| (११) $\frac{६३}{३} \parallel \frac{३}{३}$ $\frac{६३}{३}$ पाई | (२३) १६ गुना                                       |
| (१२) $\frac{५६}{३} \parallel \frac{३}{३}$                    | (२४) ६६०० कुववा $\frac{१}{५}$ मील                  |

॥ मिश्र प्रश्न जो लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

- |                                               |                                                |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------|
| (१) — र य                                     | (११) न                                         |
| (२) (क-२) य                                   | (१२) ५ य                                       |
| (३) (३ ग-५-१) य                               | (१३) य                                         |
| (४) मं                                        | (१४) $\frac{३}{३} + \frac{२}{३} + \frac{२}{३}$ |
| (५) $\frac{३}{३}$                             | (१५) $\frac{३}{३} - \frac{२}{३} + \frac{३}{३}$ |
| (६) $\frac{३}{३} + \frac{२}{३}$               | (१६) $\frac{३}{३}$                             |
| (७) $\frac{३}{३} + \frac{२}{३} + \frac{३}{३}$ | (१७) $\frac{३}{३} + \frac{२}{३}$               |
| (८) $\frac{३}{३} + \frac{२}{३} + \frac{३}{३}$ | (१८) $\frac{३}{३} + \frac{२}{३} + \frac{३}{३}$ |
| (९) $\frac{३}{३} + \frac{२}{३} + \frac{३}{३}$ | (१९) $\frac{३}{३} + \frac{२}{३} + \frac{३}{३}$ |
| (१०) $\frac{३}{३} + \frac{२}{३}$              | (२०) $\frac{३}{३} + \frac{२}{३} - \frac{३}{३}$ |



- (२२)  $y = -z$
- (२३)  $z + k$
- (२३)  $\frac{4z + 5r}{5y - 6z}$
- (२४)  $\frac{y(y+2)}{2}$
- (२५)  $y = 4$
- (२६)  $y = 20$
- (२७)  $y = 8$
- (२८)  $y = 3\frac{3}{8}$
- (२९)  $y = -\frac{3}{3}$
- (३०)  $y = \frac{9}{6}$
- (३१)  $y = -8\frac{2}{3}$
- (३२)  $y = 2\frac{9}{2}$
- (३३)  $y = 7\frac{93}{22}$
- (३४)  $y = \pm 2\frac{1}{2}\sqrt{5}$
- (३५)  $y = 3$  वा  $5\frac{2}{3}$
- (३६)  $y = 2$  वा  $-2\frac{3}{4}$
- (३७)  $y = 2$  वा  $8\frac{5}{13}$
- (३८)  $y = 2$  वा  $8\frac{3}{6}$
- (३९)  $y = 4$  वा  $3\frac{2}{3}$
- (४०)  $y = 5$  वा  $2\frac{5}{20}$
- (४१)  $y = \frac{3y}{4}$  वा  $\frac{z}{9}$
- (४२)  $y = 2$  वा  $-2\frac{6}{93}$

- |                            |   |                                    |   |                                               |
|----------------------------|---|------------------------------------|---|-----------------------------------------------|
| (४३) $y = 8$<br>$r = 2$    | } | (४६) $y = 2\frac{1}{2}$<br>$r = 4$ | } | (४६) $y = 6$<br>$r = 12$                      |
| (४४) $y = 4$<br>$r = 3$    |   | (४७) $y = 5$<br>$r = 4\frac{1}{3}$ |   | (४७) $y = 22$<br>$r = 22$                     |
| (४५) $y = 131$<br>$r = 31$ |   | (४८) $y = 11$<br>$r = 14$          |   | (४८) $y = \pm 3$<br>$r = 3$ वा $3\frac{1}{3}$ |

- (५२) ३३ हाथ
- (५३) ७५००
- (५४) २२, २८, ५०
- (५५) २२
- (५६) पहला मनुष्य = १ रोज }  
दूसरा मनुष्य = ३ रोज }
- (५७) ३२०
- (५८) २८, ३८, ६२
- (५९) दीसंगतरे और दसी
- (६०) ४ मान
- (६१)  $\frac{n^2}{n+1}$  और  $\frac{n}{n+2}$
- (६२) ३२ ज्ञाने वा ३ }  
और २५ मनुष्य }
- (६३) ३००

(६४) ८२०० और टेलरके	(७४) ११२ सिर बांदी
(६५) ३६ २०० फुट वा १३३००	और ३६ सिर बांदी
गज वा ७ ३ मील और १०० गज	(७७) व = ६५ क
(६६) ३५५	(७८) ६७ १० ह
(६७) ४७	(७९) ३७ ४८
(६८) (७०) ५३ ४०	(८०) १ ८
(६९) ९६	(८१) ३ ३९ ३/७ अंगुल
(७०) ५२ और ४८	(८२) १ ३
(७१) ७ और ६	(८३) ७२ ८१ ॥ ३५ पाद
(७२) २ सिर बांदी मेट हर्ड	(८४) १२३ ६८ २६ ४३
और नवे दिन दोनो १७ को सचले	(८५) ८ २४ अंगुल
(७३) १५ २१ २४	(८६) १३ १३ १३

इति

लिखित नागर व  
सक ख



